

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PHILIPPE SATGÉ

## Inégalités de miroir

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 18, n° 2 (1976-1977),  
exp. n° 18, p. 1-4

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1976-1977\\_\\_18\\_2\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A2_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

INÉGALITES DE MIROIR

par Philippe SATGÉ

Soit  $d$  un entier positif sans carré,  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ,  $\bar{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$ ,  $\mathcal{K}$  et  $\bar{\mathcal{K}}$  les groupes des classes de  $k$  et  $\bar{k}$ . Désignant respectivement par  $\dim_3 \mathcal{K}$  et  $\dim_3 \bar{\mathcal{K}}$  les dimensions des espaces vectoriels sur le corps à trois éléments des quotients de  $\mathcal{K}$  et  $\bar{\mathcal{K}}$  par leurs cubes, SCHOLTZ [2] établit l'inégalité

$$0 \leq \dim_3 \bar{\mathcal{K}} - \dim_3 \mathcal{K} \leq 1.$$

LEOPOLDT [1] a généralisé ce résultat en considérant un nombre premier impair  $\ell$ , deux corps  $k$  et  $\bar{k}$  galoisiens sur  $\mathbb{Q}$  et de degrés non divisibles par  $\ell$ , et en établissant des inégalités entre les dimensions sur le corps à  $\ell$  éléments de certaines parties des quotients des groupes des classes de  $k$  et  $\bar{k}$  par leurs puissances  $\ell$ -ièmes. Nous allons établir, dans certains cas, des inégalités analogues en supprimant l'hypothèse de non-divisibilité par  $\ell$  des degrés de  $k$  et  $\bar{k}$ . Les démonstrations de ces inégalités étant relativement longues, nous ne les donnerons pas ici. Ce texte se divisera donc en deux parties : la première contenant les hypothèses et les notations, la seconde les résultats.

1. Notations.

Dans tout ce papier,  $\ell$  est un nombre premier impair, et  $n$  un entier positif. On s'intéresse aux extensions cycliques  $k/\mathbb{Q}$  du corps  $\mathbb{Q}$  des rationnels dont le degré divise  $(\ell - 1)\ell^{n-1}$  et qui vérifient les deux conditions suivantes :

- (a) le corps  $k$  ne contient pas de racines  $\ell$ -ièmes de l'unité non triviale ;
- (b) si  $\ell$  est sauvagement ramifié dans  $k/\mathbb{Q}$ , alors le complété  $\hat{k}$  de  $k$  au-dessus de  $\ell$  (i. e. en une place de  $k$  divisant  $\ell$ ) ne contient pas de racines  $\ell$ -ièmes de l'unité non triviales (un moyen simple de réaliser cette condition est de supposer que  $\ell - 1$  ne divise pas le degré de  $k/\mathbb{Q}$  lorsque  $\ell$  est sauvagement ramifié).

On désigne par  $\zeta$  une racine primitive  $\ell^n$ -ième de l'unité, par  $k'$  le corps  $k(\zeta)$ , par  $G$  et  $G'$  les groupes de Galois de  $k/\mathbb{Q}$  et de  $k'/\mathbb{Q}$ , par  $E$  et  $\mathcal{K}$  le groupe des unités et le groupe des classes de  $k$ , et par  $(\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})^*$  le groupe multiplicatif de l'anneau des entiers modulo  $\ell^n$ . Si  $\Psi$  est un homomorphisme de  $G$  dans  $(\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})^*$ , on note  $\mathcal{K}_\Psi$  le sous-groupe de  $\mathcal{K}$  formé des classes  $h$ , telles que  $h^{\ell^n} = 1$  et  $\sigma(h) = h^{\Psi(\sigma)}$  pour tout  $\sigma \in G$ , et  $E(\Psi)$  le sous-groupe de  $E$  formé des  $e \in E$  vérifiant  $\sigma(e)e^{-\Psi(\sigma)} \in E^{\ell^n}$  ( $E^{\ell^n}$  = puissances  $\ell^n$ -ièmes de  $E$ ) pour tout  $\sigma \in G$ .

Pour tout  $\sigma \in G'$ , on définit  $\theta(\sigma) \in (\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})^*$  par l'égalité  $\sigma(\zeta) = \zeta^{\theta(\sigma)}$ . Si

$\Psi$  est un homomorphisme de  $G$  dans  $(\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})^*$  et si  $\sigma \in G'$ , on pose

$$\bar{\Psi}(\sigma) = \Psi(\sigma^{-1}|_k) \theta(\sigma),$$

où  $\sigma^{-1}|_k$  est la restriction de l'inverse de  $\sigma$  à  $k$ . L'application  $\bar{\Psi}$  est un homomorphisme de  $G'$  dans  $(\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})^*$

On désigne par  $\bar{k}$  le corps des invariants du noyau de  $\bar{\Psi}$ , par  $\bar{G}$  le groupe de Galois de  $\bar{k}/\mathbb{Q}$ , par  $\bar{\mathcal{H}}$  le groupe des classes de  $\bar{k}$ , et par  $\bar{\mathcal{H}}^{\bar{\Psi}}$  le quotient de  $\bar{\mathcal{H}}$  par son sous-groupe engendré par les  $h^{\ell^n}$  et les  $\sigma(h)h^{-\bar{\Psi}(\sigma)}$ , où  $h$  décrit  $\bar{\mathcal{H}}$  et  $\sigma$  décrit  $\bar{G}$ . On voit que  $\bar{k}/\mathbb{Q}$  est une extension cyclique dont le degré divise  $(\ell - 1)\ell^{n-1}$ , et que  $\bar{\mathcal{H}}^{\bar{\Psi}}$  est le plus grand quotient de  $\bar{\mathcal{H}}$  annulé par  $\ell^n$  sur lequel les éléments de  $\sigma \in \bar{G}$  agissent comme l'élévation à la puissance  $\bar{\Psi}(\sigma)$ .

Enfin, nous aurons besoin de préciser quelques notations concernant les  $\ell$ -groupes abéliens finis. Soit  $A$  un tel groupe, il est isomorphe à un produit  $\prod_{i=1}^t (\mathbb{Z}/\ell^{n_i} \mathbb{Z})$ ; l'ensemble des  $n_i$ , pour  $i = 1, \dots, t$ , est un invariant de  $A$ . Pour tout entier  $k$ , on appelle  $\ell^k$ -rang de  $A$  et on note  $r_k(A)$  le nombre des  $i$  tels que  $n_i \geq k$ .

## 2. Énoncé des résultats.

Les hypothèses et les notations sont celles introduites au § 1. On suppose de plus que l'homomorphisme  $\Psi$  est injectif. Pour énoncer les résultats nous devons distinguer un cas spécial : nous dirons que l'on est dans le cas spécial si  $\ell - 1$  divise le degré de  $\bar{k}/\mathbb{Q}$  et si  $\ell$  est totalement décomposé dans le sous-corps de degré  $\ell - 1$  de  $\bar{k}$ . On voit facilement que cela est équivalent au fait que le complété  $\hat{k}$  de  $k$  au-dessus de  $\ell$  contient un  $\mu \neq 1$  tel que  $\mu^\ell = 1$  et que, pour tout  $\sigma$  dans le groupe de décomposition de  $\ell$  dans  $k$ , on ait  $\sigma(\mu) = \mu^{\Psi(\sigma)}$  (En identifiant le groupe de décomposition de  $\ell$  dans  $k$  avec le groupe de  $\hat{k}/\mathbb{Q}_\ell$ ).

On pose

$$e_j(\Psi) = r_j(E(\Psi)/E^{\ell^n}), \quad r_j(\Psi) = r_j(\mathcal{H}_\Psi) \quad \text{et} \quad R_j(\bar{\Psi}) = r_j(\bar{\mathcal{H}}^{\bar{\Psi}});$$

on a alors le théorème suivant.

**THÉORÈME 1.** - Soit  $j$  un entier,  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Si l'on n'est pas dans le cas spécial, alors

$$r_j(\Psi) + e_j(\Psi) \geq R_j(\bar{\Psi}) \geq r_j(\Psi) - 1$$

si  $\ell$  n'est pas sauvagement ramifié dans  $k$ , et

$$r_j(\Psi) + e_j(\Psi) \geq R_j(\bar{\Psi}) \geq r_j(\Psi) - 2$$

sinon.

Si l'on est dans le cas spécial, alors

$$r_j(\Psi) + e_j(\Psi) + 1 \geq R_j(\overline{\Psi}) \geq r_j(\Psi) - 2 .$$

Ce théorème s'améliore dans deux cas particuliers; Tout d'abord lorsque  $\ell$  ne divise pas le degré de  $k/\underline{Q}$  ( $k$  est alors une extension cyclique de  $\underline{Q}$  dont le degré divise  $\ell - 1$ ), on a le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Si  $k/\underline{Q}$  est une extension cyclique dont le degré divise  $\ell - 1$ , alors si l'on n'est pas dans le cas spécial, on a

$$-1 \leq r_j(\Psi) - R_j(\overline{\Psi}) \leq 0 \quad \text{si } k \text{ est réel}$$

et

$$0 \leq r_j(\Psi) - R_j(\overline{\Psi}) \leq 1 \quad \text{si } k \text{ est complexe.}$$

Si l'on est dans le cas spécial, on a

$$-2 \leq r_j(\Psi) - R_j(\overline{\Psi}) \leq 1 \quad \text{si } k \text{ est réel}$$

et

$$-1 \leq r_j(\Psi) - R_j(\overline{\Psi}) \leq 2 \quad \text{si } k \text{ est complexe.}$$

Enfin, si le degré de  $k/\underline{Q}$  est égal à  $\ell$  (on ne peut pas être alors dans le cas spécial, et  $\hat{k}$  ne peut pas contenir de racines  $\ell$ -ièmes non triviales de l'unité), on a le résultat ci-après.

THÉORÈME 3. - Si  $k/\underline{Q}$  est une extension cyclique de degré  $\ell$ , alors

$$r_j(\Psi) + 1 \geq R_j(\overline{\Psi}) \geq r_j(\Psi) - 1$$

si  $\ell$  n'est pas ramifié dans  $k$ , et

$$r_j(\Psi) + 1 \geq R_j(\overline{\Psi}) \geq r_j(\Psi) - 2$$

sinon.

Remarque 1. - Dans le cas du théorème 3, on peut voir que quel que soit  $n$  et quel que soit  $\Psi$ , le groupe  $\mathcal{K}_\Psi$  est le groupe des classes ambiges de  $k$ . Les  $r_j(\Psi)$  pour  $j > 1$  sont donc nuls, et le  $r_1(\Psi)$  est donné par la formule de Chevalley. Le théorème 3 donne alors de bonnes informations sur  $R_j(\overline{\Psi})$ .

Remarque 2. - L'hypothèse d'injectivité de  $\Psi$  est indispensable dans nos théorèmes lorsque  $\ell$  divise le degré de  $k/\underline{Q}$ . En effet, si l'on supprimait cette hypothèse, on pourrait appliquer ces théorèmes avec  $n = 1$  et  $\Psi = 1$  (i. e.  $\Psi(\sigma) = 1 \in (\underline{Z}/\ell)^*$  pour tout  $\sigma \in G$ ). Le groupe  $\mathcal{K}_\Psi$  serait alors le groupe des classes ambiges de  $k$ . Il en résulterait que l'on peut avoir  $r_1(\Psi)$  arbitrairement grand en choisissant bien  $k$ . D'autre part, le corps  $\overline{k}$  serait alors le corps des racines  $\ell$ -ièmes de l'unité et donc  $R_1(\overline{\Psi})$  est une constante indépendante de  $k$ . On ne peut donc pas avoir d'inégalité du type  $R_j(\overline{\Psi}) \geq r_j(\Psi) - c$ , où  $c$  est une constante.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] LEOPOLDT (H.-W.). - Zur Struktur der  $\mathfrak{L}$ -Klassengruppe galoisscher Zahlkörper, J. für reine und angew. Math., t. 199, 1958, p. 165-174.
- [2] SCHOLTZ (A.). - Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander, J. für reine und angew. Math., t. 166, 1932, p. 201-203.

(Texte reçu le 14 mars 1977)

Philippe SATGÉ  
UER de Sciences  
Département de Mathématiques  
Université de Caen  
14032 CAEN CEDEX

NOTE ajoutée à la correction des épreuves [Juin 1977]. - Depuis la rédaction de ce travail, ces résultats ont été généralisés par Bernard ORIAT. Les nouveaux résultats seront publiés dans un article rédigé en commun par ORIAT et moi-même. Cet article contiendra les démonstrations de tout ce qui est annoncé ici.

---