Martine Pathiaux

Classification en sous familles fermées de n-uples de nombres algébriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1976-1977), exp. nº G23, p. G1-G3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A19_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° G23, 3 p.

6 juin 1977

CLASSIFICATION EN SOUS FAMILLES FERMÉES DE n-UPLES DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

par Martine PATHIAUX

Introduction. - On appelle Σ^n l'ensemble des n-uples $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ où θ_i pour $i = 1, 2, \ldots, n$ est un nombre algébrique de module > 1 dont tous les conjugués, autres que θ_j pour $j \neq i$, sont de module < 1. Soit $P(z)$ le polynôme primitif de $\underset{\sim}{Z}[z]$, de plus bas degré, dont $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ sont racines, et $Q(z)$ le polynôme réciproque de $P(z)$. Soit $q \in \underset{\sim}{N}^*$; Σ_q^n désigne alors l'ensemble des éléments de Σ^n tels que $Q(0) = q$.

On remarque que :

1° $\Sigma_1^1 = S =$ ensemble des nombres de Pisot et S est fermé ;

2° Si $q = 1$, $n > 1$, l'ensemble Σ_1^n a été étudié par CANTOR [1], qui n'est pas arrivé à démontrer que Σ_1^n est fermé. Cette question reste toujours ouverte.

3° Si $q \neq 1$, $n = 1$, on ne sait pas si Σ_q^1 est fermé. Par contre C. PISOT [3] a défini un ensemble S_q^1 fermé contenu dans Σ_q^1. J'ai démontré [2] que

$$\Sigma^1 = \bigcup_{q\in \underset{\sim}{N}^*} S_q^1 .$$

De façon analogue, je vais définir des ensembles S_q^n fermés, contenus dans Σ_q^n, et tels que $\Sigma^n = \bigcup_{q\in \underset{\sim}{N}^*} S_q^n$.

Définition. - Soit $q \in \underset{\sim}{N}^*$, S_q^n est l'ensemble des n-uples $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, où θ_i, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, sont des nombres algébriques de module > 1 auxquels on peut associer deux polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ de $\underset{\sim}{Z}[z]$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $Q(0) = q$,

(ii) $\frac{1}{\theta_1}, \frac{1}{\theta_2}, \ldots, \frac{1}{\theta_n}$ sont les seuls zéros de $Q(z)$ dans $|z| \leq 1$,

(iii) $A(\frac{1}{\theta_i}) \neq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

(iv) $|\frac{A(z)}{Q(z)}| \leq 1$ si $|z| = 1$,

(v) $\frac{A(z)}{Q(z)} = u_0 + u_1 z + \ldots$ avec

$$\begin{vmatrix} u_0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ u_1 & u_0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_i & u_{i-1} & \dots & u_0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & u_0 & u_1 & \dots & u_i \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & u_0 & \dots & u_{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & u_0 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

pour $i = 0 , 1 , \dots , n-1$

On peut démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 1. - S_q^n *est fermé*.

La démonstration consiste à associer à tout élément de S_q^n la fraction $A(z)/Q(z)$ qui sert à le définir, et ensuite on utilise les résultats de SCHUR [4] pour caractériser les fractions rationnelles vérifiant les conditions (iv) et (v), et ayant n pôles dans $|z| < 1$.

THÉORÈME 2. - $\Sigma^n = \bigcup_{q \in N^*} S_q^n$.

La démonstration utilise encore les résultats de SCHUR et le lemme suivant.

LEMME 1. - *Soit* $A(z)$ *un polynôme de* $\underset{\sim}{R}[z]$, *ayant toutes ses racines dans* $|z| > 1$, *alors quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un polynôme* $A_\varepsilon(z)$ *de* $\underset{\sim}{Q}[z]$, *ayant toutes ses racines dans* $|z| > 1$ *et tel que*

(i) $|A_\varepsilon(z)| < |A(z)|$ *si* $|z| = 1$,

(ii) $\|A_\varepsilon - A\| < \varepsilon$.

($\|A\|$ désigne le sup de la valeur absolue des coefficients de A .)

THÉORÈME 3. - *Si* (θ_1 , θ_2) *est point limite de* S_q^2 , *alors* $|\theta_1| \neq 1$ *et* $|\theta_2| \neq 1$.

La démonstration consiste à montrer dans une première étape que si $(\theta_1 , \theta_2) \in S_q^2$, alors $|\theta_1| - 1$ et $|\theta_2| - 1$ restent supérieurs à une constante $\neq 0$, ne dépendant que de $u_0 , u_1 , u_2 , \theta_1$ et θ_2 , où u_i sont les coefficients du développement en série entière de la fraction rationnelle associée à (θ_1 , θ_2) .

THÉORÈME 4. - *Soit* (θ_1 , θ_2) *un élément de* S_1^2 , *alors* (θ_1 , θ_2) *est point limite de* S_1^2 *si, et seulement si, il existe deux polynômes* $A(z)$ *et* $Q(z)$ *vérifiant les propriétés de définition, l'égalité* $|A(z)| = |Q(z)|$ *n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points de* $|z| = 1$.

La démonstration se fait de façon analogue au cas où $n = 1$, et utilise le théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CANTOR (D.). - On sets of algebraic integer whose remaining conjugates lie in the unit circle, Trans. Amer. Math. Soc., t. 105, 1962, p. 391-406.

[2] PATHIAUX (Martine). - Familles fermées de nombres algébriques dont la réunion est l'ensemble des nombres algébriques de module > 1, tous leurs conjugués étant de module < 1, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977, Série A, p. 1319-1320.

[3] PISOT (C.). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 81, 1964, p. 165-189.

[4] SCHUR (J.). - Über Potenzreihen die im Innern des Einheitskreiss beschränkt sind, J. für reine und angew. Math., t. 147, 1917, p. 205-232.

(Texte reçu le 27 juin 1977)

Martine PATHIAUX
187 boulevard Bineau
92200 NEUILLY