Michel Mendès France

Indépendance statistique, somme des chiffres, mesure spectrale

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1976-1977), exp. nº G9, p. G1-G4
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A15_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° G9, 4 p.

13 décembre 1976

INDÉPENDANCE STATISTIQUE, SOMME DES CHIFFRES, MESURE SPECTRALE

par Michel MENDÈS FRANCE

1. Indépendance statistique.

Soient $f_1 = (f_1(n))$ et $f_2 = (f_2(n))$ deux suites complexes.

Elles sont dites indépendantes si les trois limites

$$Mf_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f_1(n)$$

$$Mf_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f_2(n)$$

$$Mf_1\, f_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f_1(n) f_2(n)$$

existent, et

$$Mf_1\, f_2 = Mf_1 . Mf_2 .$$

Plus généralement, les s suites $f_1 , f_2 , \ldots , f_s$ sont indépendantes si, pour tout $t \leqslant s$ et tout t-uple $(i_1 , i_2 , \ldots , i_t) \in \{1 , 2 , \ldots , s\}^t$ de nombres distincts deux à deux, les moyennes $M\prod_{k=1}^t f_{i_k}$ existent et

$$M\prod_{k=1}^t f_{i_k} = \prod_{k=1}^t Mf_{i_k}$$

(M et $\prod$ commutent !).

Une famille infinie $\mathfrak{F}$ de suites complexes f est dite indépendante si toute sous-famille finie est indépendante.

2. La fonction somme des chiffres.

Soit $q \geqslant 2$ un entier fixé. Tout entier $n \geqslant 0$ peut s'exprimer en base q :

$$n = \sum_{k=0}^\infty e_k(n)\, q^k ,$$

où $e_k(n) \in \{0 , 1 , \ldots , q - 1\}$, et où

$$e_k(n) = 0 \quad \text{pour} \quad k \geqslant \left[\frac{\log n}{\log q}\right] + 1 .$$

La suite $e_k = (e_k(n))$ (k fixé) est une suite périodique de période q^{k+1} .

La famille $\mathcal{E} = \{e_k ; \; k = 0 , 1 , 2 , \ldots\}$ est une famille indépendante ainsi qu'on peut le vérifier de façon élémentaire :

$$Me_k = \frac{q-1}{2} ; \quad Me_k\, e_\ell = \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 \quad \text{si} \quad k \neq \ell ; \ldots$$

Plus généralement, soit $\Phi = \{\varphi_k ; \; k = 0 , 1 , 2 , \ldots\}$ une famille d'applications $\varphi_k : \{0 , 1 , \ldots , q - 1\} \longrightarrow \underline{C}$. La famille $\Phi \circ \mathcal{E} = \{\varphi_k \circ e_k ; \; k=0,1,2,\ldots\}$

est indépendante :

$$M\prod_{k=0}^{s} \varphi_k \circ e_k = \prod_{k=0}^{s} M\varphi_k \circ e_k = \prod_{k=0}^{s} \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \varphi_k(a) .$$

Il est tout à fait remarquable que la formule soit encore presque vraie pour s infini, pourvu que $|\varphi_k| = 1$ et $\varphi_k(0) = 1$ pour $k = 0 , 1 , 2 , \dots$. On montre qu'en effet [10] ,

$$\lim_{x\to\infty} \sup \frac{1}{x}\Big|\sum_{n\leq x} \prod_{k=0}^{\infty} \varphi_k \circ e_k(n)\Big| = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q}\Big|\sum_{a=0}^{q-1} \varphi_k(a)\Big| .$$

Le cas particulier où $\varphi_k(x) = \exp 2i\pi x\, c_k$ mérite attention. Dans ce cas, posant

$$\zeta_c(n) = \exp 2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, e_k(n) ,$$

on voit que

$$\lim_{x\to\infty} \sup \frac{1}{x}\Big|\sum_{n\leq x} \zeta_c(n)\Big| = \prod_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\sin \pi q c_k}{q \sin \pi c_k}\right| ,$$

où on convient que

$$\left|\frac{\sin \pi q n}{q \sin \pi n}\right| = 1 \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{Z} .$$

Le produit infini converge si, et seulement si, $\sum_{k=0}^{\infty} \|c_k\|^2 < \infty$, où

$$\|x\| = \min_{n\in \mathbb{Z}} |x - n| .$$

Cette remarque conduit au résultat suivant [9] dont on trouvera une généralisation dans [3].

THÉORÈME 1. - Soit $\theta > 1$ un nombre réel. La suite λ_θ

$$\lambda_\theta(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)\, c_k$$

est équirépartie (mod 1) si, et seulement si, θ n'est pas un nombre de Pisot.

3. Propriétés spectrales de certaines suites arithmétiques.

La caractérisation précédente peut être complétée comme suit.

Soit $\zeta = (\zeta(n))$ une suite infinie bornée appartenant à la classe S de Wiener ([11], chapitre 4, Generalized harmonic analysis), c'est-à-dire, admettant une corrélation γ :

$$\gamma(m) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} \overline{\zeta(n)}\, \zeta(n + m)$$

existe pour tout $m \in \mathbb{N}$. On prolonge γ à $\mathbb{Z}$ par l'égalité $\gamma(-m) = \overline{\gamma(m)}$.

Un résultat classique établit l'existence d'une mesure positive bornée $d\sigma$ (appelée mesure spectrale de ζ) telle que

$$\gamma(m) = \int_0^1 \exp 2i\pi m x \, d\sigma(x) .$$

On sait que $d\sigma$, comme toute mesure, est somme de trois termes : une mesure atomique $d\sigma^a$, une mesure absolument continue $f\,dx$, $f \in L^1(0\,,\,1)$, une mesure purement singulière $d\sigma^s$. La nature de $d\sigma$ nous renseigne sur le comportement de la suite ζ . Ainsi, si la composante diffuse $f\,dx + d\sigma^s$ est nulle, alors ζ est presque-périodique (au sens de J.-P. BERTRANDIAS [2]). Si par contre la composante atomique $d\sigma^a$ est nulle, ζ est pseudo-aléatoire [1].

On peut montrer que la suite $\zeta = \prod_{j=0}^{\infty} \varphi_j \circ e_j$ dont on a vu quelques propriétés au paragraphe 2, appartient à la classe S de WIENER ([4], [7], [8]). Il s'ensuit que ζ admet une mesure spectrale.

THÉORÈME 2. - <u>La suite</u> $\zeta = \prod_{j=0}^{\infty} \varphi_j \circ e_j$ <u>est ou bien presque-périodique, ou bien pseudo-aléatoire à spectre purement singulier</u> [6].

Dans le cas particulier où $\varphi_j(x) = \exp 2i\pi x c_j$, on obtient l'énoncé suivant qui prolonge et précise les résultats établis dans [4] et [5].

COROLLAIRE 1. - <u>Soit</u> ζ_c <u>la suite</u>

$$\zeta_c(n) = \exp 2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, e_k(n) \ .$$

<u>Si la série</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k - q c_{k-1}\|^2$ <u>converge,</u> ζ_c <u>est presque-périodique</u>. <u>Si la série diverge,</u> ζ_c <u>est pseudo-aléatoire à mesure spectrale purement singulière</u>.

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> $\theta > 1$ <u>un nombre réel, et soit</u> ζ_θ <u>la suite</u>

$$\zeta_\theta(n) = \exp 2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k\, e_k(n)$$

<u>Si</u> θ <u>est un nombre de Pisot, alors</u> ζ_θ <u>est presque-périodique</u>. <u>Si</u> θ <u>n'est pas un nombre de Pisot, alors</u> ζ_θ <u>est pseudo-aléatoire à mesure spectrale purement singulière</u>.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS (J.). - Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 1-69.

[2] BERTRANDIAS (J.-P.). - Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p , Bull. Soc. math. France, Mémoire n° 5, 1966, 106 p.

[3] COQUET (J.). - Remarques sur les nombres de Pisot-Vijayaraghavan, Acta Arithm., Warszawa, t. 32, 1977, p. 79-87.

[4] COQUET (J.) et MENDÈS FRANCE (M.). - Suites à spectre vide et suites pseudo-aléatoires, Acta Arithm., Warszawa, t. 32, 1977, p. 99-106.

[5] KAKUTANI (S.). - Strictly ergodic symbolic dynamical systems, "Proceeding of the 6th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability", vol. 2, p. 319-326. - Berkeley, University of California Press, 1972.

[6] KAMAE (T.), COQUET (J.) et MENDES FRANCE (M.) [soumis au Bull. Soc. math. France]

[7] MAHLER (K.). - On the translation properties of a simple class of arithmetical functions, J. of Math. and Phys., t. 6, 1927, p. 158-163.

[8] MENDÈS FRANCE (M.). - Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-

aléatoires, J. Anal. math., Jerusalem, t. 20, 1967, p. 1-56 (Thèse Sc. math. Paris, 1967).

[9] MENDÈS FRANCE (M.). - Deux remarques concernant l'équirépartition des suites, Acta Arithm., Warszawa, t. 14, 1968, p. 163-167.

[10] MENDÈS FRANCE (M.). - Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1 , J. Number Theory, t. 5, 1973, p. 1-15.

[11] WIENER (N.). - The Fourier integral and certain of its applications. - New York, Dover publications, 1958.

(Texte reçu le 10 janvier 1977)

Michel MENDÈS FRANCE
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE