Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

ROLAND GILLARD

Sur le groupe des classes des extensions abéliennes réelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1976-1977), exp. nº 10, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_1_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° 10, 6 p.

3 janvier 1977

SUR LE GROUPE DES CLASSES DES EXTENSIONS ABÉLIENNES RÉELLES

par Roland GILLARD

1. Enoncé des résultats (1).

1.1. - Soient K un corps de nombres abélien réel, et ℓ un nombre premier impair. On suppose que le degré (fini) de K est premier à ℓ. On désigne par E le groupe des unités de K, et par C le sous-groupe des unités cyclotomiques : on sait (cf. [6], Satz 20) que la ℓ-partie de l'ordre du groupe E/C est égale à la ℓ-partie de l'ordre du groupe $\mathcal{C}(K)$ des classes d'idéaux de K. Le but de ce travail est de préciser ce résultat. Pour tout groupe fini X, on note $[X]$ son ordre.

Soit G le groupe de Galois de $K/\mathbb{Q}$. L'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G]$ se décompose en somme directe :

$$\mathbb{Z}_\ell[G] = \bigoplus e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G] ,$$

où Φ parcourt l'ensemble des caractères de G définis et irréductibles sur $\mathbb{Q}_\ell$, et e_Φ l'idempotent correspondant :

$$e_\Phi = \frac{1}{[G]} \sum_{\sigma\in G} \Phi(\sigma^{-1})\, \sigma .$$

Ceci permet de décomposer les ℓ-sous-groupes de Sylow de E/C et $\mathcal{C}(K)$, notés respectivement $(E/C)_\ell$ et $\mathcal{C}_\ell(K)$:

$$(E/C)_\ell = \bigoplus e_\Phi (E/C)_\ell \qquad \mathcal{C}_\ell(K) = \bigoplus e_\Phi\, \mathcal{C}_\ell(K) .$$

Dans [3], G. GRAS formule la conjecture suivante.

CONJECTURE 1. - <u>Les groupes</u> $e_\Phi(E/C)_\ell$ <u>et</u> $e_\Phi\, \mathcal{C}_\ell(K)$ <u>ont même ordre.</u>

Remarquons que si Φ est le caractère trivial, les deux groupes ci-dessus sont nuls. Nous écartons donc ce cas dans la suite. Soient K' le corps obtenu par adjonction à K des racines ℓ-ièmes de l'unité, et G' son groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$. Pour notre discussion, nous formulons des hypothèses restrictives :

(H. R.)
(a) aucun idéal au-dessus de ℓ n'est décomposé dans l'extension entre K' et son sous-corps réel maximal.
(b) le ℓ-sous-groupe de Sylow $\mathcal{C}_\ell(K')$ du groupe des classes de K' est $\mathbb{Z}_\ell[G']$-monogène.

Ces hypothèses nous sont indispensables pour appliquer le théorème 3 ci-dessous. Le résultat principal est le suivant :

---

(1) En préparant cet exposé, j'ai appris que Ralph GREENBERG avait déjà obtenu ces résultats, par une méthode analogue.

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> K <u>et</u> ℓ <u>vérifient (H. R.), pour chaque</u> Φ <u>la conjecture</u> 1 <u>est vraie</u>.

1.2. - Pour chaque idéal $\mathfrak{L}$ de K au-dessus de ℓ, désignons par $K_{\mathfrak{L}}$ le complété de K correspondant, par $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}$ l'anneau des entiers de $K_{\mathfrak{L}}$, par $U_{\mathfrak{L}}$ le groupe des unités de $K_{\mathfrak{L}}$ congrues à 1 modulo $\mathfrak{L}\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}$. Désignons par U (resp. par $\hat{K}$, resp. par $\hat{\mathcal{O}}$) le produit des $U_{\mathfrak{L}}$ (resp. des $K_{\mathfrak{L}}$, resp. des $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}$) muni de la topologie produit. Considérons l'intersection de U et de l'image diagonale de E (resp. de C) dans $\hat{K}$; notons $\bar{E}$ (resp. $\bar{C}$) sa fermeture dans U. Désignons par Ω_ℓ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$, et par $|\ |$ la valeur absolue de Ω_ℓ vérifiant $|\ell| = 1/\ell$. Si Ψ est un caractère de G, défini et irréductible sur Ω_ℓ, et si Ψ intervient dans la décomposition de Φ, on notera $\Psi|\Phi$. A un tel Ψ est attaché une fonction L ℓ-adique (cf. par exemple [5]).

Le groupe $\bar{C}$ intervient dans la démonstration du théorème 1 par l'énoncé suivant (indépendant de (H. R.)) :

THÉORÈME 2. - <u>Le groupe</u> $e_\Phi(U/\bar{C})$ <u>est fini et son ordre est égal à</u> :

$$|L_\ell(1\ ,\ \Phi)|^{-1} = |\textstyle\prod_{\Psi|\Phi} L_\ell(1\ ,\ \Psi)|^{-1}\ .$$

1.3. - La démonstration du théorème 1 utilise les $\mathbb{Z}_\ell$ extensions cyclotomiques de K et K' (cf. [4]) : si $\mathbb{Q}_\infty$ désigne l'unique $\mathbb{Z}_\ell$ extension de $\mathbb{Q}$, on note K_∞ et K'_∞ les extensions composées de $\mathbb{Q}_\infty$ avec K et K'. On désigne par M_∞ (resp. L_∞) la ℓ-extension abélienne non ramifiée pour les idéaux premiers à ℓ (resp. non ramifiée) maximale de K_∞. On définit de même M, L, M'_∞, L'_∞ (à partir de K et K'_∞).

Pour Φ donné (fixé dans toute la suite) et $\Psi|\Phi$, soient f le conducteur de Ψ, et q le plus petit commun multiple de f et ℓ. On appelle γ le générateur du groupe de Galois Γ de K'_∞/K' qui agit sur les racines d'ordre une puissance de ℓ par élévation à la puissance $1 + q$. Les groupes de Galois $\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$, $\mathrm{Gal}\ (L_\infty/K_\infty)$ etc. sont des $\mathbb{Z}_\ell[\Gamma]$-modules topologiques compacts. En faisant correspondre à γ, la série formelle $1 + T$, on peut les munir de structures de $\mathbb{Z}_\ell[[T]]$-modules de type fini (cf. [4]).

Désignons par A l'anneau obtenu par adjonction à $\mathbb{Z}_\ell$ de l'image de Ψ. Soit ω le caractère de G' obtenu par l'action sur les racines de l'unité d'ordre ℓ. On note $\tilde{\Psi}$ le caractère $\omega\Psi^{-1}$, et $\tilde{\Phi}$ la somme de ses conjugués sur $\mathbb{Q}_\ell$. Soit $f(T\ ,\ \Psi)$ la série formelle associée par IWASAWA (cf. [5], §6) au caractère de Dirichlet primitif défini par Ψ. Soit enfin $e_{\tilde{\Phi}}$ l'idempotent de $\mathbb{Z}_\ell[G']$ associé à $\tilde{\Phi}$. La conjugaison dans $\mathrm{Gal}\ (L'_\infty/\mathbb{Q}_\infty)$ permet de définir une action de G' sur $\mathrm{Gal}\ (L'_\infty/K'_\infty)$. On peut énoncer (cf. [1]) le résultat suivant.

CONJECTURE 2. - <u>Il existe un</u> $\mathbb{Z}_\ell[[T]]$ <u>homomorphisme injectif à conoyau fini de</u> $e_{\tilde{\Phi}}\ \mathrm{Gal}\ (L'_\infty/K'_\infty)$ <u>dans le quotient</u> $A[[T]]/(f(T\ ,\ \Psi))$.

Les hypothèses (H. R.) interviennent dans le théorème suivant (cf. [1]).

THÉORÈME 3. - Si K et ℓ vérifient (H. R.), alors la conjecture 2 est vraie.

Le théorème 3 permet d'utiliser le théorème 4 (indépendant de (H. R.)) :

THÉORÈME 4. - Si K , ℓ et Φ vérifient la conjecture 2, ils vérifient la conjecture 1.

Ainsi, le théorème 1 résulte immédiatement des théorèmes 3 et 4.

Le théorème 4 est démontré au §3. Sa démonstration utilise le théorème 2 dont la démonstration fait l'objet du §2. Les notations introduites ci-dessus restent valables dans la suite.

2. Démonstration du théorème 2.

2.1. - Fixons un plongement φ de K dans Ω_ℓ . Définissons, pour α dans K , un élément $T_\Psi(\alpha)$ dans Ω_ℓ :

(1) $$T_\Psi(\alpha) = \sum_{\theta\in G} \Psi^{-1}(\theta)\ \varphi(\theta(\alpha)) .$$

Comme K , identifié à son image par le plongement diagonal, est dense dans $\hat{K}$, on peut prolonger à cet anneau l'action de G et les applications φ et T_Ψ . On conserve les mêmes notations pour les prolongements.

En prenant le logarithme sur chaque composante, on définit une application $\mathcal{L}og$ de U dans $\hat{K}$. Cette application commute avec l'action de G sur $\hat{K}$. De plus, si un élément α de E se plonge diagonalement dans U , $\varphi(\mathcal{L}og\ \alpha)$ n'est autre que le logarithme de $\varphi(\alpha)$ dans Ω_ℓ . On a alors :

(2) $$T_\Psi(\mathcal{L}og\ \alpha) = \sum_{\theta\in G} \Psi^{-1}(\theta)\ \log[\varphi(\theta(\alpha))] .$$

Si α est un élément de $\hat{K}$, et u un élément de G , on déduit de (1) :

(3) $$T_\Psi(u(\alpha)) = \Psi(u)\ T_\Psi(\alpha) .$$

Cette formule s'étend sans difficulté au cas où u est un élément de $\underset{\sim}{Z}_\ell[G]$ en prolongeant Ψ par linéarité sur cette algèbre. Pour α dans $\hat{K}$, posons :

(4) $$T_\Phi(\alpha) = |\textstyle\prod_{\Psi|\Phi} T_\Psi(\alpha)| .$$

Si $\mathrm{Im}\,\Psi$ désigne l'image de Ψ dans Ω_ℓ , et N la norme de $\underset{\sim}{Q}_\ell(\mathrm{Im}\,\Psi)$ à $\underset{\sim}{Q}_\ell$, à partir de (3) on obtient :

(5) $$\forall\ u \in \underset{\sim}{Z}_\ell[G] ,\quad T_\Phi(u(\alpha)) = |N(\Psi(u))|\ T_\Phi(\alpha) .$$

Cette formule permet de montrer qu'il existe une, et une seule fonction, T'_Φ définie sur l'ensemble des sous-$\underset{\sim}{Z}_\ell[G]$-modules de $e_\Phi \hat{K}$ qui en sont des réseaux, fonction vérifiant les deux propriétés suivantes :

(6) $\forall\ \alpha \in e_{\Phi}\hat{K}\ ,\quad \alpha \neq 0\ ,\quad T'_{\Phi}(\mathbb{Z}_{\ell}[G].\alpha) = T_{\Phi}(\alpha)\ ,$

(7) pour tout A , B avec $A \supset B$, $T'_{\Phi}(A) = [A/B]\, T'_{\Phi}(B)$.

2.2. – Nous allons énoncer trois formules pour T'_{Φ} qui suffisent à démontrer le théorème 2. La première donne l'expression de $T'_{\Phi}(e_{\Phi}\ \mathcal{L}og\ \overline{C})$:

(8) $$T'_{\Phi}(e_{\Phi}\ \mathcal{L}og\ \overline{C}) = \left|\prod_{\Psi|\Phi} L_{\ell}(1\ ,\ \Psi)\right| . \left|\prod_{\Psi|\Phi} \frac{\tau(\Psi)}{f}\left(1 - \frac{\Psi(\ell)}{\ell}\right)\right|^{-1} .$$

Le fait que $e_{\Phi}\ \mathcal{L}og\ \overline{C}$ soit un réseau de $e_{\Phi}\hat{K}$ résulte de la conjecture de Leopoldt vérifiée puisque K est abélien. La formule (8) résulte de (6), de la définition des unités cyclotomiques (cf. [6]), de (2) et de la formule de [5], § 5 , pour $L_{\ell}(1\ ,\ \Psi)$. Dans les calculs s'introduisent des facteurs parasites qui se réduisent à ceux de (8) grâce à l'hypothèse $\ell \nmid [G]$.

La formule suivante ramène le calcul de $T'_{\Phi}(e_{\Phi}\ \mathcal{L}og\ U)$ à celui de $T'_{\Phi}(e_{\Phi}\ \hat{\mathcal{O}})$. On désigne par μ l'ordre du groupe de torsion de $e_{\Phi}\ U$:

(9) $$T'_{\Phi}(e_{\Phi}\ \mathcal{L}og\ U) = \mu^{-1}.T'_{\Phi}(e_{\Phi}\ \hat{\mathcal{O}}).\left|\prod_{\Psi|\Phi}\left(1 - \frac{\Psi(\ell)}{\ell}\right)\right|^{-1} .$$

Sa démonstration résulte d'un calcul d'indice facile : par (7), il suffit d'exprimer les indices du module

$$e_{\Phi}\prod_{\mathfrak{L}|\ell}\mathfrak{L}^{r} = e_{\Phi}\log\Big(\prod_{\mathfrak{L}|\ell}(1 + \mathfrak{L}^{r}\ \mathcal{O}_{\mathfrak{L}})\Big)\ ,\ \text{pour}\ \ r\ \ \text{assez grand}\ ,$$

dans $e_{\Phi}\log U$ et $e_{\Phi}\ \hat{\mathcal{O}}$. Notre dernière formule donne la valeur de $T'_{\Phi}(e_{\Phi}\ \hat{\mathcal{O}})$ à l'aide de sommes de Gauss :

(10) $$T'_{\Phi}(e_{\Phi}\ \hat{\mathcal{O}}) = \left|\prod_{\Psi|\Phi}\tau(\Psi^{-1})\right| .$$

On utilise [7] pour obtenir une base explicite de $\mathcal{O}$ sur un ordre de $\mathbb{Q}[G]$ exprimée à l'aide d'une somme T_K de sommes de Gauss. Lorsqu'on passe de $\mathcal{O}$ à $\hat{\mathcal{O}} \simeq \mathcal{O} \otimes \mathbb{Z}_{\ell}$, l'ordre est remplacé (en vertu de l'hypothèse $\ell \nmid [G]$) par $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$. Il suffit alors de calculer l'image des sommes de Gauss par les applications T_{Ψ} .

2.3. – D'après (7), on a

(11) $$[e_{\Phi}(U/\overline{C})] = \mu[e_{\Phi}\ \mathcal{L}og\ U/e_{\Phi}\ \mathcal{L}og\ \overline{C}] = \mu T'_{\Phi}(e_{\Phi}\ \mathcal{L}og\ U)/T'_{\Phi}(e_{\Phi}\ \mathcal{L}og\ \overline{C})\ .$$

Le théorème 2 résulte alors des égalités précédentes et de l'égalité classique $\tau(\Psi)\ \tau(\Psi^{-1}) = f$.

3. Démonstration du théorème 4.

On suppose qu'il existe un $\mathbb{Z}_{\ell}[[T]]$-homomorphisme à noyau et conoyau finis :

$$e_{\tilde{\Phi}}\ \mathrm{Gal}(L'_{\infty}/K'_{\infty}) \longrightarrow A[[T]]/(f(T\ ,\ \Psi))\ .$$

On déduit, comme dans [4], théorème 16, mais en tenant compte de l'idempotent et du choix différent de γ , qu'il existe aussi un $\mathbb{Z}_{\ell}[[T]]$-homomorphisme à noyau et conoyau finis :

$$e_{\Phi'}\ \mathrm{Gal}\ (M'_\infty/K'_\infty) \longrightarrow A[[T]]/(f(\frac{1+q}{1+T}-1\ ,\ \Psi))\ .$$

Ici Φ' désigne le caractère de G' défini à l'aide de Φ et du passage au quotient $G' \longrightarrow G$, et $e_{\Phi'}$ l'idempotent correspondant. On rappelle que la conjugaison dans $\mathrm{Gal}\ (M'_\infty/\underset{\sim}{Q}_\infty)$ et $\mathrm{Gal}\ (M_\infty/\underset{\sim}{Q}_\infty)$ permet de munir $\mathrm{Gal}\ (M'_\infty/K'_\infty)$ et $\mathrm{Gal}\ (M_\infty/K_\infty)$ de structures respectivement de G'-module et de G-module, ces structures étant compatibles entre elles.

On sait, d'après [4], théorème 18, que $\mathrm{Gal}\ (M'_\infty/K'_\infty)$ n'a pas de sous-$\underset{\sim}{Z}_\ell[[T]]$-module fini non trivial. De plus, $e_{\Phi'}\ \mathrm{Gal}\ (M'_\infty/K'_\infty)$ s'identifie à $e_\Phi\ \mathrm{Gal}\ (M_\infty/K_\infty)$. Il en résulte qu'on peut écrire une suite exacte de $\underset{\sim}{Z}_\ell[[T]]$-modules avec un conoyau D fini :

$$0 \longrightarrow e_\Phi\ \mathrm{Gal}\ (M_\infty/K_\infty) \longrightarrow A[[T]]/(f(\frac{1+q}{1+T}-1\ ,\ \Psi)) \longrightarrow D \longrightarrow 0\ . \tag{12}$$

Il est clair que M contient K_∞ ; de plus, $\mathrm{Gal}\ (M/K_\infty)$ s'obtient en divisant $\mathrm{Gal}\ (M_\infty/K_\infty)$ par le groupe des commutateurs qui est, en notations additives,

$$(1-\gamma)\ \mathrm{Gal}\ (M_\infty/K_\infty) = T.\,\mathrm{Gal}\ (M_\infty/K_\infty)\ .$$

L'action de G commutant avec celle de $\mathrm{Gal}\ (K_\infty/K)$, on a un résultat analogue pour $e_\Phi\ \mathrm{Gal}\ (M_\infty/K_\infty)$ et $e_\Phi\ \mathrm{Gal}\ (M/K_\infty)$. Le caractère Φ étant non trivial, ce dernier groupe s'identifie à $e_\Phi\ \mathrm{Gal}\ (M/K)$. Le noyau de la multiplication par T dans le module du milieu de (12) est nul (cf. [4], §2.2.). En notant par ${}_TD$ le noyau de la multiplication par T dans D , on peut écrire la suite exacte :

$$0 \longrightarrow {}_TD \longrightarrow e_\Phi\ \mathrm{Gal}\ (M/K) \longrightarrow A/(f(q\ ,\ \Psi)) \longrightarrow D/T.D \longrightarrow 0\ .$$

Les modules finis ${}_TD$ et $D/T.D$ ayant le même ordre, on voit que le groupe $e_\Phi\ \mathrm{Gal}\ (M/K)$ (fini, d'après [4], §2.2.) est d'ordre $|N(f(q\ ,\ \Psi))|^{-1}$, N désignant, comme en 2.1, la norme de $\underset{\sim}{Q}_\ell\ (\mathrm{Im}\ \Psi)$ à $\underset{\sim}{Q}_\ell$. Mais, d'après [5], §6, on a :

$$L_\ell(s\ ,\ \Psi) = 2f(\ (1+q)^s - 1\ ,\ \Psi)\ ,\quad \forall\ s \in \underset{\sim}{Z}_\ell\ .$$

En utilisant le théorème 2, on déduit (ℓ étant impair) :

$$[e_\Phi(G(M/K)] = |\textstyle\prod_{\Psi|\Phi} L_\ell(1\ ,\ \Psi)|^{-1} = [e_\Phi(U/\overline{C})]\ .$$

D'après la théorie du corps de classes, on a un isomorphisme :

$$e_\Phi\ \mathrm{Gal}\ (M/L) \simeq e_\Phi(U/\overline{E})\ .$$

Ces groupes sont finis (cf. toujours [4], §2.2.). En comparant avec ce qui précède, on déduit que les groupes $e_\Phi\ \mathrm{Gal}\ (L/K)$ et $e_\Phi(\overline{E}/\overline{C})$ ont même ordre. Pour achever la démonstration du théorème 4, il suffit d'observer que $\overline{E}$ et $\overline{C}$ étant respectivement isomorphes à $E \otimes \underset{\sim}{Z}_\ell$ et $C \otimes \underset{\sim}{Z}_\ell$, $e_\Phi(\overline{E}/\overline{C})$ est isomorphe à $E_\Phi(E/C)_\ell$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COATES (J.) and LICHTENBAUM (S.). - On ℓ-adic zeta functions, Annals of Math., t. 98, 1973, p. 498-550.

[2] COATES (J.). - p-adic L-functions and Iwasawa theory, "Algebraic numbers fields" [1975. Durham], p. 269-353. - London, Academic Press, 1977.

[3] GRAS (G.). - Classes d'idéaux des corps abéliens et nombres de Bernoulli généralisés, Annales Institut Fourier, Grenoble, t. 27, 1977, fasc. 1, p. 1-66.

[4] IWASAWA (K.). - On Z_ℓ-extensions of algebraic number fields, Annals of Math., t. 98, 1973, p. 246-326.

[5] IWASAWA (K.). - Lectures on p-adic L-functions.-Princeton, Princeton University Press, 1972 (Annals of Math. Studies, n° 74).

[6] LEOPOLDT (H.). - Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper, Abh. Deutsch. Akad. Berlin, 1954, n° 2, p. 3-48.

[7] LEOPOLDT (H.). - Über die Hauptordnung der ganze Elemente eines abelschen Zahlkörpers, J. für reine und angew. Math, t. 201, 1959, p. 119-149.

(Texte reçu le 14 février 1977)

Roland GILLARD
Laboratoire associé au CNRS n° 188
Institut de Mathématiques pures
Boîte postale 116
38402 SAINT MARTIN D'HÈRES.