Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Hédi Daboussi

Remarques sur les fonctions multiplicatives

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1976-1977), exp. nº 4, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_1_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° 4, 3 p.

25 octobre 1976

REMARQUES SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES

par Hédi DABOUSSI

1. Une fonction $f : \underset{\sim}{N}^* \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ est <u>multiplicative</u> si $f(mn) = f(m).f(n)$ dès que $(m , n) = 1$.

Une fonction $g : \underset{\sim}{N}^* \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ est <u>presque périodique</u> B^λ (en abrégé pp B^λ) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P_ε tel que

$$\overline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} |g(n) - P_\varepsilon(n)|^\lambda \leqslant \varepsilon .$$

Si on peut choisir P_ε périodique, alors g est limite périodique B^λ .

Le spectre de Fourier-Bohr de f est

$$\sigma(f) = \{\alpha \in \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z} \text{ tel que } \overline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{1}{x} |\sum_{n\leqslant x} f(n) \exp(-2\pi i n\alpha)| > 0\} .$$

On notera $M(f)$ la limite, si elle existe, de $\frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f(n)$.

La lettre p désigne un nombre premier.

" $p^j \| n$ " signifie " p^j divise n et p^{j+1} ne divise pas n ".

THÉORÈME 1. - <u>Pour qu'une fonction multiplicative</u> f <u>soit</u> pp B^λ $(\lambda \geqslant 1)$ <u>avec un spectre</u> $\sigma(f)$ <u>non vide, il faut et il suffit qu'il existe un caractère de Dirichlet</u> χ <u>tel que les sommes ou séries suivantes soient finies ou convergentes</u> :

$$\sum_p \frac{\chi(p) f(p) - 1}{p} , \quad \sum_{|f(p)|\leqslant 2} \frac{|\chi(p) f(p) - 1|^2}{p} ; \quad \sum_{|f(p)|>2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} , \quad \sum_p \sum_{r\geqslant 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} .$$

En fait f est ℓp B^λ .

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> $\lambda > 1$ <u>et</u> f <u>une fonction multiplicative</u>.

(a) <u>Supposons que</u>

$$\overline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} |f(n)|^\lambda < + \infty ,$$

$M(f)$ <u>existe et est non nulle, alors les sommes ou séries suivantes convergent</u>

$$\sum \frac{f(p) - 1}{p} , \quad \sum_{|f(p)|\leqslant 2} \frac{|f(p) - 1|^2}{p} , \quad \sum_{|f(p)|>2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} , \quad \sum_p \sum_{r\geqslant 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} ,$$

<u>et pour tout</u> p <u>la quantité</u> $1 + \sum_{k\geqslant 1} (f(p^k)/p^k)$ <u>est non nulle</u>.

(b) <u>Réciproquement, si ces sommes ou séries sont finies ou convergentes</u>, f <u>est limite périodique</u> B^λ <u>et en particulier</u> $M(f)$ <u>existe et est non nulle, si, et seulement si, pour tout</u> p <u>premier</u> $1 + \sum_{k\geqslant 1} (f(p^k)/p^k)$ <u>est non nulle</u>.

<u>Remarques</u>. - Le théorème 1 généralise un théorème de DELANGE et l'auteur [1] .

La condition suffisante de ce théorème, a été obtenue indépendamment par DELANGE [4].

Le théorème 2 généralise le théorème bien connu de DELANGE [3] (cas où $|f(n)| \leqslant 1$) et un théorème d'ELLIOTT [6] (cas où $\lambda = 2$). La démonstration d'ELLIOTT a été simplifiée par DELANGE et l'auteur [2]. Sa méthode ne fournit pas le cas $\lambda > 1$, $\lambda \neq 2$.

Les conditions du théorème 2 ne sont plus nécessaires si $\lambda = 1$.

2. Donnons quelques indications sur les démonstrations. Les preuves complètes paraîtrons ailleurs.

2.1. Un outil important est l'inégalité de TURAN-KUBILIUS [9], mise sous la forme ci-dessous par ELLIOTT [5].

$$\sum_{p^j \leqslant x} \frac{1}{p^j} \left| \frac{p^j}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p^j \| n}} f(n) - \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n) \right|^2 \leqslant C \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |f(n)|^2 .$$

Nous utilisons également un théorème d'ERDÖS [7], caractérisant les fonctions multiplicatives ayant une distribution limite, non concentrée à l'origine.

Cela nous permet d'obtenir une condition nécessaire pour qu'une fonction multiplicative positive soit pp B^λ $(\lambda \geqslant 1)$.

Dans le cas général d'une fonction multiplicative f pp B^λ, on pose :

$$\rho(n) = |f(n)| \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} \dfrac{f(n)}{|f(n)|} & \text{si} \quad f(n) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(n) = 0 \ ; \end{cases}$$

ρ et g sont alors multiplicatives, ρ est pp B^λ, et on déduit d'un théorème de DELANGE et l'auteur [1], que g est nécessairement pp B, et que $\sigma(g) \neq \emptyset$ si $\sigma(f) \neq \emptyset$.

On a alors les conditions annoncées.

La partie suffisante est essentiellement basée sur un théorème d'ERDÖS-RENYI [8].

2.2. Nous montrons que si f multiplicative vérifie les hypothèses du théorème, et si $1 < \alpha \leqslant \lambda$, il existe une constante $D(\alpha)$ telle que, pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout ensemble fini de nombres premiers E, on a :

$$\prod_{p \in E} \left[1 + \sum_{r=1}^{k} \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r}\right] \left[1 - \frac{1}{p}\right] \exp \alpha\left(\frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p}\right) \leqslant D(\alpha) .$$

En choisissant convenablement E et k, on en déduit que

$$\sum_{|f(p)| \leqslant 2} \frac{|f(p) - 1|^2}{p} < +\infty , \quad \sum_{|f(p)| > 2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < +\infty , \quad \sum_{p} \sum_{r \geqslant 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} < +\infty .$$

Pour montrer que la série $\sum((f(p) - 1)/p)$ converge, on utilise la méthode classique de DELANGE [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] DABOUSSI (H.) et DELANGE (H.). - Quelques propriétés de fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 657-660.

[2] DABOUSSI (H.) and DELANGE (H.). - On a theorem of P. D. T. Elliot on multiplicative functions, J. London math. Soc., Series 2, t. 14, 1976, p. 345-356.

[3] DELANGE (H.). - Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives, Annales Ec. Norm. Sup., t. 78, 1961, p. 273-304.

[4] DELANGE (H.). - Quelques résultats sur les fonctions multiplicatives, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 281, 1975, Série A, p. 997-1000.

[5] ELLIOTT (P. D. T. A.). - On connections between the Turan-Kubilius inequality and the large sieve : some applications, "Analytic number theory", p. 77-82. - Providence, American mathematical Society, 1973 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 24).

[6] ELLIOTT (P. D. T. A.). - A mean-value theorem for multiplicative functions, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 31, 1975, p. 418-438.

[7] ERDÖS (P.). - Some remarks about additive and multiplicative functions, Bull. Amer. math. Soc., t. 52, 1946, p. 527-537 ; Some remarks and corrections to one of my papers, Bull. Amer. math. Soc., t. 53, 1947, p. 761-763.

[8] ERDÖS (P.) and RENYI (A.). - On the mean value of nonnegative multiplicative number-theoretical functions, Michigan math. J., t. 12, 1965, p. 321-328.

[9] KUBILIUS (J.). - Probabilistic methods in the theory of numbers. - Providence, American mathematical Society, 1964 (Translations of mathematical Monographs, 11).

(Texte reçu le 11 juillet 1977)

Hédi DABOUSSI
Mathématiques, Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY