Marie-José Bertin

Familles fermées de n-uples irréductibles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1976-1977), exp. nº 2, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_1_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° 2, 8 p.

11 octobre 1976

FAMILLES FERMÉES DE n-UPLES IRRÉDUCTIBLES

par Marie-José BERTIN

1. Introduction.

DÉFINITION 1. - On appelle 2-entier réel un entier algébrique réel θ , $\theta > 1$, ayant un seul conjugué θ_1 , $\theta_1 \neq \theta$, de module supérieur à 1, et ayant tous ses autres conjugués de module strictement inférieur à 1.

A la notion de 2-entier réel, on associe la notion de 2-uple réel irréductible ; plus précisément, au 2-entier θ , on associe le 2-uple irréductible (θ , θ_1) formé de θ et de son unique conjugué de module strictement supérieur à 1.

Ces définitions se généralisent aisément au cas de n-entier réel ou imaginaire ayant $n - 1$ conjugués de module supérieur à 1, autres que lui-même. On précisera dans tous les cas la nature réelle ou imaginaire de ces conjugués. De même, on définit la notion de n-uple irréductible.

La famille de tous les 2-entiers réels n'est pas fermée, puisque l'ensemble des 2-entiers réels quadratiques est partout dense dans $\mathbb{R}$ (cf. KELLY [4]).

On va donc chercher des sous-familles fermées de 2-entiers, de 2-uples, et plus généralement de n-entiers et de n-uples irréductibles.

2. Les familles $\mathcal{S}_0(q , h)$ et $\mathcal{S}_1(1 , h , \delta)$.

Une première idée de recherche est dans la direction des résultats exposés en juin au séminaire Delange-Pisot-Poitou [1].

Dans toute la suite, on désignera par θ_0 le plus petit nombre de Pisot.

DÉFINITION 2. - On appelle $\mathcal{S}_0(q , h)$ l'ensemble des 2-entiers réels θ , $1 < \theta < \theta_0$, dont l'inverse $\frac{1}{\theta}$ ainsi que $\frac{1}{\theta_1}$ sont racines d'une équation de la forme $z^2 = A(z)/Q(z)$ où les polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ sont à coefficients entiers rationnels vérifiant $A(0) = \pm 1$, $Q(0) = q$ entier > 0 , $A(z)/Q(z)$ holomorphe dans $|z| \leqslant 1$ telle que $|A(z)/Q(z)| \leqslant h < 1$ sur $|z| = 1$.

DÉFINITION 3. - On appelle $\mathcal{S}_1(1 , h , \delta)$ l'ensemble des 2-entiers réels θ , $1 < \theta < \theta_0$, dont l'inverse $1/\theta$ ainsi que $1/\theta_1$ sont racines d'une équation de la forme $z = A(z)/Q(z)$ où $A(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers rationnels vérifiant $A(0) = \pm 1$, $Q(0) = 1$, $A(z)/Q(z)$ possédant exactement un pôle dans $|z| \leqslant 1$ situé dans la couronne $0 < \delta \leqslant |z| < 1$, et vérifiant $|A(z)/Q(z)| \leqslant h < 1$ sur $|z| = 1$.

On peut alors démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Les ensembles $\mathcal{S}_0(q , h)$ et $\mathcal{S}_1(1 , h , \delta)$ sont fermés.

La démonstration utilise les familles compactes de fractions rationnelles introduites par PISOT (cf. [5] ou [6]), et en outre trois lemmes.

LEMME 1. - Soit θ un nombre algébrique réel, $|\theta| > 1$, dont l'inverse est racine d'une équation de la forme $z^2 = A(z)/Q(z)$, où $A(z)/Q(z) \in \mathfrak{F}(q , 0)$, alors on a $|\theta| \leqslant M(q)$, où $M(q)$ est une constante ne dépendant que de l'entier $q = Q(0)$.

(On désigne par $\mathfrak{F}(q , 0)$ l'ensemble des fractions rationnelles $\varphi(z) = A(z)/Q(z)$, où $A(z)$ et $Q(z)$ appartiennent à $\mathbb{Z}[z]$ vérifiant $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q$ entier > 0 , $\varphi(z)$ étant holomorphe dans $|z| \leqslant 1$ telle que $|\varphi(z)| \leqslant 1$ sur $|z| = 1$.)

LEMME 2. - Soit θ un nombre algébrique réel, $|\theta| > 1$, dont l'inverse est racine d'une équation de la forme $z = A(z)/Q(z)$, où

$$A(z)/Q(z) \in \mathfrak{F}(q , 1 , \delta) - \mathfrak{F}(q , 0) ,$$

alors, on a $|\theta| \leqslant M'(q , \delta)$, où $M'(q , \delta)$ est une constante ne dépendant que de l'entier q et du nombre réel δ .

(On désigne par $\mathfrak{F}(q , 1 , \delta)$ l'ensemble des fractions rationnelles $\varphi(z) = A(z)/Q(z)$, où $A(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers, vérifiant $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q$ entier > 0 , $\varphi(z)$ possédant au plus un pôle dans $|z| \leqslant 1$, situé dans la couronne $0 < \delta \leqslant |z| < 1$ et vérifiant $|\varphi(z)| \leqslant 1$ sur $|z| = 1$.)

LEMME 3 (Lemme d'irréductibilité des polynômes). - Soit $P(z)$ un polynôme unitaire à coefficients entiers ayant deux racines réelles de module supérieur à 1, θ et θ' dont l'une d'elles, par exemple θ , vérifie $1 < \theta < \theta_0$, ses autres racines étant de module strictement inférieur à 1, alors $P(z)$ est irréductible.

Exemples d'éléments appartenant à $\mathcal{S}_0(q , h)$. - Les entiers algébriques θ , $1 < \theta < \theta_0$, dont l'inverse vérifie une des équations,

$$z^2 = \frac{1 + (q - 1)z}{q + z} ; \qquad z^2 = \frac{1 + z + z^2}{3 + z} ; \qquad z^2 = \frac{1 + z + z^2 + z^h}{3 + z + z^h} ,$$

où h est un entier > 0 .

On peut alors se demander si en caractérisant tous les 2-entiers θ dont l'unique conjugué réel de module supérieur à 1, θ_1 , vérifie $1 < |\theta_1| < \theta_0$, et en généralisant les propositions qui ont amené SALEM [7] à démontrer que l'ensemble S des nombres de Pisot était fermé, on n'obtiendrait pas des sous-familles fermées de 2-entiers réels.

3. Caractérisation des ensembles $\tilde{S}_2^*$ et $\tilde{S}_3^*$.

DÉFINITION 4. - On désigne par $\tilde{S}_2^*$ l'ensemble des 2-entiers algébriques réels dont le conjugué de module supérieur à 1, θ_1, vérifie $1 < |\theta_1| < \theta_0$.

DÉFINITION 5. - On désigne par $\tilde{S}_3^*$ l'ensemble des 3-entiers algébriques réels possédant deux conjugués réels θ_1 et θ_2 de module supérieur à 1, vérifiant $1 < |\theta_i| < \sqrt{\theta_0}$ pour $i = 1, 2$;

On peut alors montrer les propositions suivantes :

PROPOSITION 1 (Caractérisation de l'ensemble $\tilde{S}_2^*$).

(i) Si θ appartient à $\tilde{S}_2^*$, alors il existe des nombres algébriques non nuls λ et λ_1 appartenant à $\mathbb{Q}(\theta)$, tels que, pour tout entier $n > 0$, on ait :

$$\lambda\theta^n + \lambda_1 \theta_1^n = u_n + \varepsilon_n \quad \text{avec} \quad u_n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 \quad \text{convergeant} ;$$

(ii) S'il existe deux nombres réels non nuls λ et λ_1, et deux nombres réels θ et θ_1 $(\theta \neq \theta_1)$ avec $|\theta| > 1$ et $1 < |\theta_1| < \theta_0$, tels que, pour tout entier $n > 0$, on ait :

$$\lambda\theta^n + \lambda_1 \theta_1^n = u_n + \varepsilon_n \quad \text{avec} \quad u_n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 \quad \text{convergeant,}$$

alors θ appartient à $\tilde{S}_2^*$ et les nombres λ et λ_1 à $\mathbb{Q}(\theta)$.

Le principe de la démonstration de cette caractérisation est le même que celui de la caractérisation de l'ensemble S des nombres de Pisot.

La condition $1 < |\theta_1| < \theta_0$, introduite dans (ii), est mise pour entraîner le fait que θ et θ_1 sont bien des entiers algébriques conjugués.

PROPOSITION 2 (Caractérisation de l'ensemble $\tilde{S}_3^*$). - Cette caractérisation s'énonce de la même façon que la précédente avec trois nombres réels non nuls λ, λ_1 et λ_2.

Dans (ii), les conditions $1 < |\theta_1| < \sqrt{\theta_0}$ et $1 < |\theta_2| < \sqrt{\theta_0}$ entraînent que les entiers algébriques θ, θ_1 et θ_2 sont effectivement conjugués.

En effet, à la fin de la démonstration de (ii), on sait que θ, θ_1 et θ_2 sont des entiers algébriques racines d'un polynôme dont les autres racines sont de module strictement inférieur à 1. Par suite, ou bien θ, θ_1 et θ_2 sont des nombres de Pisot (mais la condition $1 < |\theta_i| < \sqrt{\theta_0}$ écarte ce cas), ou bien θ est un nombre de Pisot, et θ_1 et θ_2 sont des entiers algébriques conjugués, mais ce dernier cas est impossible, car, d'après les résultats de C. CHAMFY [3], il n'existe pas d'entiers algébriques conjugués θ_1 et θ_2, vérifiant $1 < |\theta_i| < \sqrt{\theta_0}$, $i = 1, 2$, dont tous les autres conjugués sont en module strictement inférieur à 1.

Remarques. - On peut montrer des caractérisations analogues :

1° pour les 3-entiers algébriques imaginaires θ , $|\theta| > 1$, dont l'unique conjugué de module supérieur à 1, réel, θ_1 , vérifie $1 < |\theta_1| < \theta_0$.

2° pour les 4-entiers algébriques imaginaires θ , $|\theta| > 1$, ayant deux autres conjugués de module supérieur à 1, distincts de $\overline{\theta}$, θ_1 et θ_2 avec éventuellement $\theta_1 = \overline{\theta}_2$, vérifiant $1 < |\theta_i| < \sqrt{\theta_0}$, $i = 1 , 2$.

En étendant les résultats de C. CHAMFY, et en montrant qu'il n'existe pas de n-entiers algébriques, $1 < |\theta| < \sqrt[n]{\theta_0}$, ayant $n - 1$ conjugués $\theta_1 , \dots , \theta_{n-1}$ vérifiant $1 < |\theta_i| < \sqrt[n]{\theta_0}$, on obtient une caractérisation des n-entiers algébriques dont les $n - 1$ conjugués θ_i vérifient $1 < |\theta_i| < \sqrt[n-1]{\theta_0}$.

Notons tout de suite la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel</u> θ , $\theta > 1$, <u>appartienne à</u> $\tilde{S}_2^*$ <u>est qu'il existe un nombre réel</u> θ_1 , $1 < |\theta_1| < \theta_0$ <u>et deux nombres réels non nuls</u> λ <u>et</u> λ_1 <u>tels que</u> $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 \pi(\lambda\theta^n + \lambda_1 \theta_1^n)$ <u>soit convergente</u>.

On peut également généraliser la proposition démontrée par SALEM [7] et qui l'a conduit à démontrer que l'ensemble S était fermé.

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> (θ_1 , θ_2) <u>un</u> 2-<u>uple réel irréductible</u>, <u>alors il existe un couple de nombres réels non nuls</u> (λ_1 , λ_2) <u>avec, ou bien</u>

$$1 \leqslant |\lambda_1| \leqslant |\theta_1| \left|\frac{1 - \theta_1 \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}\right| \qquad 0 < \lambda_2 \leqslant |\theta_2| \left|\frac{1 - \theta_1 \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}\right| ,$$

<u>ou bien le contraire</u>,

$$0 < |\lambda_1| \leqslant |\theta_1| \left|\frac{1 - \theta_1 \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}\right| \qquad 1 \leqslant \lambda_2 \leqslant |\theta_2| \left|\frac{1 - \theta_1 \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}\right|$$

<u>tel que l'on ait</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 \pi[\lambda_1 \theta_1^n + \lambda_2 \theta_2^n]$$

$$\leqslant \max \left[\pi^2\left(\frac{(\theta^3 + 3\theta)^2}{(|\theta_1| - 1)^2 (|\theta_2| - 1)^2} \frac{1}{|\theta_1 - \theta_2|^2}\right) , \pi^2\left(\frac{\theta_1^2}{\theta_1^2 - 1} + \frac{\theta_2^2}{\theta_2^2 - 1} + \frac{2|\theta_1 \theta_2|}{|\theta_1 \theta_2| - 1}\right)\right]$$

<u>où</u> $\theta = \max (|\theta_1| , |\theta_2|)$.

Cette proposition 4 pourrait nous servir à montrer le théorème 1 suivant qui exhibe une famille fermée de 2-uples réels irréductibles "assez petits". Elle permettrait seulement d'obtenir un théorème 2 un peu plus faible concernant une famille fermée de 2-entiers.

4. Familles fermées de "petits" 2- et 3-uples irréductibles.
Familles fermées de 2- et 3-entiers assez "petits".

THÉORÈME 1. - L'ensemble des 2-uples irréductibles réels (θ_1, θ_2), vérifiant $1 < |\theta_i| < \theta_0$ pour $i = 1, 2$, est fermé.

THÉORÈME 2. - L'ensemble des 2-entiers θ, éléments de S_2^*, et vérifiant $1 < \theta < \theta_0$, est fermé.

Démonstration. - Soit (θ_p) une suite de tels 2-entiers tendant vers θ avec $1 < \theta < \theta_0$. On peut supposer les θ_p non "réciproques", c'est-à-dire que les $P_p(z)$ ayant les θ_p pour racines ne sont pas réciproques, ce qui est possible car avec les hypothèses concernant les θ_p on a, au plus, un nombre fini de θ_p "réciproques".

Les conjugués $\theta_{1,p}$ de module supérieur à 1 vérifiant $1 < |\theta_{1,p}| < \theta_0$, tendent donc vers une limite θ_1, et l'on a $1 \leqslant |\theta_1| \leqslant \theta_0$.

On a forcément $|\theta_1| \neq 1$. Ceci peut se voir par exemple en utilisant l'inégalité de Smyth sur le produit des conjugués extérieurs au disque unité [8]. On a, en effet, $|\theta_p\,\theta_{1,p}| \geqslant \theta_0$ et si l'on avait $|\theta_1| = 1$, on aurait en passant à la limite $|\theta| \geqslant \theta_0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On considère alors la suite de fractions rationnelles $P_p(z)/Q_p(z)$, associée aux θ_p, où $Q_p(z)$ désigne le polynôme réciproque de $Q_p(z)$.

Les $P_p(z)/Q_p(z)$ appartiennent à la famille compacte de fractions rationnelles $\mathfrak{F}(1, 2, 1/\theta_0)$, où $\mathfrak{F}(1, 2, 1/\theta_0)$ désigne l'ensemble des fractions rationnelles $\varphi(z) = A(z)/Q(z)$, où $A(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers vérifiant $A(0) \neq 0$, $Q(0) = 1$, $\varphi(z)$ ayant au plus 2 pôles situés dans la couronne $0 < 1/\theta_0 \leqslant |z| < 1$ et vérifiant $|\varphi(z)| \leqslant 1$ sur $|z| = 1$.

On peut donc extraire de la suite des $P_p(z)/Q_p(z)$ une sous-suite infinie convergeant uniformément sur tout compact de $|z| < 1$ vers un élément $A^*(z)/Q^*(z)$ de $\mathfrak{F}(1, 2, 1/\theta_0)$. Par suite, la fraction rationnelle $A^*(z)/Q^*(z)$ possède au plus 2 pôles dans $|z| < 1$, ces pôles ne pouvant être que $1/\theta$ et $1/\theta_1$. Or, d'après un lemme sur les fonctions méromorphes dans le cercle-unité [6], $A^*(z)/Q^*(z)$ possède au moins un pôle dans $|z| < 1$.

Nous allons montrer que la possibilité $|\theta_1| = \theta_0$ ne peut avoir lieu. En effet, si $A^*(z)/Q^*(z)$ possédait uniquement le pôle simple $1/\theta_1 = \varepsilon/\theta_0$ dans $|z| < 1$, alors comme $|A^*(z)/Q^*(z)| \leqslant 1$ sur $|z| = 1$, l'égalité ayant lieu en un nombre fini de points au plus, ceci entraînerait que θ_0 appartiendrait à l'ensemble dérivé S' de l'ensemble des nombres de Pisot, d'après la caractérisation de S'. Or ceci est impossible. Si $A^*(z)/Q^*(z)$ possédait les pôles $1/\theta_1 = \varepsilon/\theta_0$ et $1/\theta$ dans $|z| < 1$, alors θ serait un nombre de Pisot, ce qui est impossible puisque l'on a $1 < \theta < \theta_0$.

On a donc forcément $1 < |\theta_1| < \theta_0$ et l'on voit aussitôt que $A^*(z)/Q^*(z)$ possède effectivement les pôles $1/\theta$ et $1/\theta_1$. Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que θ et θ_1 sont conjugués, c'est-à-dire que $Q^*(z)$ est irréductible (on peut, par exemple, appliquer le lemme 3). Avant de généraliser ces deux théorèmes 1 et 2, citons le théorème 3, conséquence immédiate des deux précédents.

THÉORÈME 3. - Tout nombre réel θ, $\theta > 1$, limite de 2-entiers algébriques réels appartenant à $\tilde{S}_2^*$, ou bien appartient à $\tilde{S}_2^*$, ou bien est un nombre de Pisot.

5. Généralisations.

(A) Généralisations du théorème 1.

THÉORÈME 1'. - L'ensemble des 3-uples irréductibles d'entiers algébriques réels $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ conjugués, vérifiant $1 < |\theta_i| < \sqrt{\theta_0}$, $i = 1, 2, 3$, est fermé.

THÉORÈME 1". - Les points limites de 3-uples irréductibles d'entiers algébriques conjugués $(\theta_1, \theta_2, \overline{\theta_2})$ avec θ_1 réel et θ_2 imaginaire vérifiant $1 < |\theta_1| < \theta_0$, $1 < |\theta_2| < \sqrt{\theta_0}$,

- s'ils sont de la forme $(\theta_1, \theta_2, \overline{\theta_2})$ avec θ_1 réel et θ_2 imaginaire, appartiennent au même ensemble.

- s'ils sont de la forme (θ_1, θ_2) avec θ_1 et θ_2 réels, sont des 2-uples réels irréductibles.

THÉORÈME 1"'. - Les points limites de 4-uples irréductibles $(\theta, \overline{\theta}, \theta_1, \overline{\theta}_1)$ d'entiers algébriques conjugués vérifiant $1 < |\theta| < \sqrt{\theta_0}$, $1 < |\theta_1| < \sqrt{\theta_0}$,

- s'ils sont de la même forme, appartiennent au même ensemble,

- s'ils sont de la forme $(\theta, \theta_1, \overline{\theta_1})$ avec θ réel et θ_1 imaginaire ou de la forme $(\theta, \overline{\theta}, \theta_1)$ avec θ imaginaire et θ_1 réel, sont des 3-uples irréductibles.

- s'ils sont de la forme (θ, θ_1) avec θ et θ_1 réels, sont des 2-uples irréductibles.

Remarque. - Les théorèmes 1, 1', 1", 1"', répondent à un problème de CANTOR [2].

CANTOR a en effet défini les P.-V. k-uples d'entiers algébriques distincts de module supérieur à 1, dont tous les autres conjugués sont dans $|z| < 1$. (Ici on a étudié des P.-V. k-uples irréductibles, c'est-à-dire des P.-V. k-uples d'entiers algébriques conjugués.)

CANTOR dit dans son article qu'il n'a pu prouver que la fermeture de l'ensemble de tous les P.-V. k-uples est contenue dans l'ensemble de tous les P.-V. k'-uples pour $k' = 1, 2, \ldots, k$.

Les théorèmes 1, 1', 1", 1"', montrent que cette conjecture est vraie pour les 2-uples, 3-uples, certains 4-uples irréductibles, d'assez petit module.

(B) Généralisations du théorème 2.

Dans la démonstration du théorème 2, on utilise une caractérisation de l'ensemble S' dérivé de l'ensemble des nombres de Pisot, et le fait que θ_0 n'appartient pas à S'.

Nous allons donc commencer par caractériser l'ensemble Σ' (resp. Σ'_1) ensemble dérivé de l'ensemble Σ (resp. Σ_1) des 2-uples réels (θ , θ_1) vérifiant $1 < \theta < \theta_0$, $1 < |\theta_1| < \theta_0$ (resp. des 2-uples imaginaires conjugués $(\theta , \overline{\theta})$ vérifiant $1 < |\theta| < \theta_0$).

PROPOSITION 5. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un 2-uple (θ , θ_1) de Σ (resp. $(\theta , \overline{\theta})$ de Σ_1) dont les inverses sont racines du polynôme irréductible $Q(z)$, appartienne à Σ' (resp. Σ'_1) est qu'il existe un polynôme à coefficients entiers $A(z)$, vérifiant $A(1/\theta) \neq 0$ et tel que $|A(z)| \leq |Q(z)|$ sur $|z| = 1$, l'égalité ayant lieu en un nombre fini de points au plus.

Nous pouvons alors énoncer les généralisations.

THÉORÈME 2'. - L'ensemble des 3-entiers réels θ , $1 < \theta < \sqrt{\theta_0}$, ayant 2 conjugués de module supérieur à 1, réels, θ_1 et θ_2 vérifiant $1 < |\theta_i| < \sqrt{\theta_0}$, pour $i = 1 , 2$, est un ensemble fermé.

THÉORÈME 2". - Les points limites de 3-entiers réels θ , $1 < \theta < \theta_0$, ayant 2 conjugués de module supérieur à 1, imaginaires conjugués θ_1 et $\overline{\theta_1}$, vérifiant $1 < |\theta_1| \leq \sqrt{\theta_0}$, ou bien appartiennent au même ensemble, ou bien sont des 2-entiers réels $1 < \theta < \theta_0$ dont le conjugué de module supérieur à 1, réel, θ_1 vérifie $1 < |\theta_1| < \sqrt{\theta_0}$.

La démonstration de ces deux théorèmes utilise la proposition suivante :

PROPOSITION 6. - Le 2-uple irréductible $\theta = \sqrt{\theta_0}$, $\theta_1 = - \sqrt{\theta_0}$, zéro du polynôme $1 + z^2 - z^6$ n'appartient pas à Σ' .

De même, les seuls 2-uples imaginaires de module $\sqrt{\theta_0}$, zéros des polynômes $1 - z^2 + z^3$, $1 - z^2 - z^3$ et $1 - z^2 + z^6$ n'appartiennent pas à Σ'_1 .

Cette proposition se démontre en reprenant tout le dernier chapitre de la thèse de C. CHAMFY, en utilisant sa méthode, et en refaisant le calcul sous des hypothèses légèrement différentes.