MAURICE MIGNOTTE

Approximation des nombres par certaines suites de rationnels

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1976-1977), exp. nº 16, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_1_A13_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° 16, 3 p.

14 février 1977

APPROXIMATION DES NOMBRES PAR CERTAINES SUITES DE RATIONNELS

par Maurice MIGNOTTE

Les raisonnements de base de cette théorie sont présentés sur des exemples très simples. On montre aussi que les résultats dépendent des propriétés arithmétiques vérifiées par les approximations.

1. Méthode élémentaire.

Considérons un nombre ξ de la forme

$$\xi = \sum_{k\geqslant 0} 2^{-n_k} ,$$

où (n_k) est une suite d'entiers strictement croissante. Soit p/q un rationnel, on cherche à minorer sa distance à ξ. Il est naturel de remplacer ξ par une approximation

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} 2^{-n_i} ;$$

on a alors $o \leqslant \xi - a_k \leqslant 2/q_{k+1}$ (on pose $q_i = 2^{-n_i}$), et on écrit tout simplement

$$|\xi - (p/q)| \geqslant |a_k - (p/q)| - 2/q_{k+1} .$$

Il ne reste plus qu'à choisir convenablement l'entier k. On est amené à supposer

(i) $a_k \neq p/q$.

Sous cette hypothèse la relation (1) implique

$$|\xi - (p/q)| \geqslant \frac{1}{qq_k} - \frac{2}{q_{k+1}} ,$$

ce qui conduit à la condition

(ii) $4qq_k \leqslant q_{k+1}$,

et alors,

(1) $$|\xi - (p/q)| \geqslant \frac{1}{4qq_k} .$$

La condition (i) est réalisée lorsque q est impair. Il est clair que la condition (ii) ne pourra être vérifiée pour q arbitraire que si on a

$$\lim\sup(n_{k+1} - n_k) = + \infty .$$

Ainsi cette méthode ne s'applique qu'aux nombres dont le développement dyadique est lacunaire.

Prenons des exemples

1° $n_k = k^2$. - La condition (ii) s'écrit alors

$$2k \geqslant 1 + \log q \quad (\text{où} \quad \log x = \operatorname{Log} x / \operatorname{Log} 2) \ .$$

On choisit

$$k = 2 + [\tfrac{1}{2} \log q] \quad (\text{où} \quad [\ ] \ \text{désigne la partie entière}) \ ,$$

et l'inégalité (1) implique

$$|\xi - (p/q)| \geqslant (4q \ 2^{(2+\log q)^2})^{-1} \ .$$

D'où l'existence d'une constante c_1 telle que l'on ait

$$|\xi - (p/q)| > q^{-c_1 \operatorname{Log} q} \ , \ \text{pour} \ q \ \text{impair.}$$

2° $n_k = 2^k$. – On procède comme ci-dessus. La condition (ii) conduit à choisir

$$k = 1 + [\log \log 4q] \ .$$

D'où l'existence d'une constante positive c_2 telle que l'on ait cette fois

$$|\xi - (p/q)| > c_2 \ q^{-3} \ , \ \text{pour} \ q \ \text{impair.}$$

3° $n_k = k!$. – Ici la même méthode fournit l'estimation

$$|\xi - (p/q)| > q^{-c_3 \operatorname{Log} \log q} \ , \ \text{pour} \ q \ \text{impair} \ ,$$

où c_3 est une constante.

On voit sur ces exemples que les résultats obtenus sont meilleurs lorsque le développement de ξ est "assez" lacunaire mais sans l'être "trop".

Problème (M. WALDSCHMIDT) : Les mesures d'irrationalité obtenues ci-dessus sont-elles optimales ?

2. Méthode de Roth.

Soit maintenant un nombre ξ donné comme limite d'une suite de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ appartenant à un corps de degré fini sur $\mathbb{Q}$. De même que plus haut, pour minorer la distance de ξ à un rationnel p/q, on écrit

$$|\xi - (p/q)| \geqslant |\alpha_k - (p/q)| - |\xi - \alpha_k| \ .$$

Mais une difficulté se présente, la méthode de Roth nécessite de considérer plusieurs approximations rationnelles d'un nombre algébrique fixé, ici α_k. Pour appliquer cette méthode on a donc besoin de supposer que la suite des approximations rationnelles considérées n'est pas trop lacunaire.

Par cette méthode, BAKER [1] a obtenu le résultat suivant.

THÉORÈME. – Soit ξ un nombre qui vérifie les conditions suivantes. Il existe une constante ρ, $\rho > 2$, et une suite de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ distincts appartenant à un corps K de degré fini sur $\mathbb{Q}$, telles que l'on ait

$$|\xi - \alpha_j| < (H(\alpha_j))^{-\rho} \ , \quad j = 1, 2, \ldots ,$$

$$\limsup (\operatorname{Log} H(\alpha_{j+1})/\operatorname{Log} H(\alpha_j)) < \infty$$

(*où* $H(\alpha)$ *désigne la hauteur de* α) .

Alors le nombre ξ *n'est pas un* U-*nombre* (voir [2] pour la définition).

De même que RIDOUT a amélioré le théorème de Roth dans le cas où on considère des approximations qui vérifient certaines conditions arithmétiques, il est possible d'améliorer le théorème précédent dans le cas où les α_j vérifient des conditions arithmétiques. Plutôt qu'un énoncé général, nous donnerons un exemple simple de résultat obtenu par cette méthode.

PROPOSITION. - *Le nombre* $\xi = \sum_{n\geq 0} 2^{-2^n}$ *n'est pas un* U- *nombre*.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER (Alan). - On Mahler's classification of transcendental numbers, Acta. Math., Uppsala, t. 111, 1964, p. 97-120.

[2] SCHNEIDER (Theodor). - Einführung in die transzendenten Zahlen. - Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1957 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 81).

(Texte reçu le 1er juillet 1977)

Maurice MIGNOTTE
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX