Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Langevin

Méthodes élémentaires en vue du théorème de Sylvester

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, n° 2 (1975-1976), exp. n° G2, p. G1-G9

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A9_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° G2, 9 p.

20 octobre 1975

MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES EN VUE DU THÉORÈME DE SYLVESTER

par Michel LANGEVIN

1. Méthodes élémentaires et théorème fondamental des nombres premiers.

On réserve la lettre p aux nombres premiers. Soit π la fonction définie par $\pi(n) = \sum_{p \leq n} 1$. Conjecturée par des mathématiciens comme GAUSS (à l'âge de quatorze ans ...) ou LEGENDRE, l'équivalence $\pi(n) \sim n/\log n$ ne sera prouvée qu'à la fin du 19e siècle à l'aide des outils analytiques forgés par RIEMANN trente-cinq ans plus tôt. Une dizaine d'années encore auparavant, ČEBIČEV avait obtenu, grâce à des procédés élémentaires, des résultats partiels, notamment l'existence de deux constantes positives A, B vérifiant, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$A(n/\log n) < \pi(n) < B(n/\log n)$$

ainsi que l'inégalité :

$$\pi(2n) > \pi(n) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 .$$

Rappelons les principaux arguments de ČEBIČEV. D'abord, il introduit deux nouvelles fonctions, moins naturelles mais plus commodes :

$$\theta(n) = \sum_{p \leq n} \log p \quad \text{et} \quad \psi(n) = \sum_{p^i \leq n} \log p .$$

La quantité $\psi(n)$ peut être interprétée simplement : c'est le logarithme du plus petit commun multiple de $1, 2, \ldots, n$ (en abrégé, p. p. c. m. $(1, 2, \ldots, n)$ qu'on note $\nu(n)$). Il est clair que, pour tout entier n,

$$\nu(n+1) = \nu(n) \quad \text{si} \quad n \neq p^i , \quad \nu(n+1) = p\nu(n) \quad \text{si} \quad n = p^i .$$

S'en déduit aussitôt, en écrivant $n+1$ sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers, l'égalité (où l'on convient de noter $\nu(x)$ pour $\nu([x])$)

$$n + 1 = \prod_{i \geqslant 1} \nu((n+1)/i)/\nu(n/i)$$

et donc

$$\log n! = \sum_{i \geqslant 1} \psi(n/i) . \tag{1}$$

Cette dernière égalité peut être obtenue par la formule, où v_p désigne la valuation p-adique, $v_p(n!) = \sum_{j \geqslant 1} [np^{-j}]$, formule en fait équivalente à (1) puisque

$$v_p(n!) = \sum_{i \geqslant 1} v_p(\nu(n/i)) = \sum_{i \geqslant 1} \sum_{p^j \leq n/i} 1 = \sum_{j \geqslant 1} [np^{-j}] .$$

Comme on sait évaluer $\log n!$ (formule de Stirling), le problème de l'étude de ψ se ramène au problème formel suivant : Résoudre (1) en ψ. L'idée la plus simple consiste à envisager le nombre $(2n!)/(n!)^2$ dont le logarithme est, d'après

(1), égal à $\sum_{i\geq 1} (-1)^{i+1} \psi(2n/i)$.

On a donc prouvé l'encadrement :

$$\psi(2n) - \psi(n) < \log(2n!)/(n!)^2 < \psi(2n) .$$

Plutôt que d'utiliser la formule de Stirling, il est plus simple ici de considérer $(2n!)/(n!)^2$ comme le coefficient binômial $\binom{2n}{n}$, ce qui permet d'écrire $4^n(2n+1)^{-1} < \binom{2n}{n} < 4^n$.

Il vient donc

$$(2) \qquad (\log 2)2n - \log(2n+1) \leq \psi(2n) \leq \psi(2n+1) ,$$

$$(3) \qquad \psi(2n) - \psi(n) < (\log 4)n .$$

De (2), on déduit aussitôt

$$L_i = \lim_{n\infty} \inf \psi(n)/n \geq \log 2 .$$

De (3), on déduit d'abord l'existence de $L_s = \lim_{n\infty} \sup \psi(n)/n$ (observer que, si $2^{a-1} \leq n < 2^a$, $\psi(n)/n \leq \psi(2)/n + 2(\log 4)2^{a-1}/n$), réel qui, d'après (3), est nécessairement inférieur ou égal à $\log 4$.

L'existence des limites L_s et L_i étant établie, il est clair que $L_s \geq 1 \geq L_i$ (observer que $\log n!$, équivalent à $n \log n$, l'est aussi à $\sum_i \psi(n/i)$ quand i reste inférieur à $n(\log n)^{-\frac{1}{2}}$ (puisque la même somme, pour i supérieur ou égal à $n(\log n)^{-\frac{1}{2}}$ est un $O(n(\log n)^{-\frac{1}{2}})$) et que cette quantité peut être amenée, pour tout réel $\varepsilon > 0$, dans l'intervalle $((L_i - \varepsilon)n(\sum_{i\leq n} i^{-1}) , (L_s + \varepsilon)n(\sum_{i\leq n} i^{-1}))$). Autrement dit, si $\psi(n)/n$ admet une limite pour n infini, ce ne peut être que 1 .

Examinons maintenant les liens entre les fonctions π , θ , ψ . D'abord, il est clair que

$$\theta(n) \leq \psi(n) = \theta(n) + \theta(n^{1/2}) + \theta(n^{1/3}) + \cdots$$

En particulier,

$$\psi(n^{1/2}) = \theta(n^{1/2}) + \theta(n^{1/4}) + \theta(n^{1/6}) + \cdots \geq \theta(n^{1/3}) + \theta(n^{1/5}) + \theta(n^{1/7}) + \cdots$$

d'où

$$\psi(n) - \theta(n) \leq 2\psi(n^{1/2}) .$$

Les égalités $L_i = \lim_{n\infty} \inf \theta(n)/n$ et $L_s = \lim_{n\infty} \sup \theta(n)/n$ sont maintenant claires.

De la définition de $\nu(n)$, on déduit l'inégalité $\nu(n) \leq n^{\pi(n)}$ et donc

$$\psi(n) \leq \pi(n) \log n ;$$

de plus, si x est un réel quelconque vérifiant $0 < x < 1$, on a

$$(\pi(n) - \pi(n^x)) \times \log n \leqslant \theta(n) .$$

Cela établit de même les inégalités

$$L_i = \lim_{n\infty} \inf \pi(n) \log n/n \quad \text{et} \quad L_s = \lim_{n\infty} \sup \pi(n) \log n/n .$$

On peut décrire plus précisément les liens entre les fonctions π et θ. En effet,

$$\pi(n) = \sum_{2\leqslant i\leqslant n} (\theta(i) - \theta(i-1))/\log i$$
$$= \sum_{2\leqslant i<n} \theta(i)((\log i)^{-1} - (\log i + 1)^{-1}) + \theta(n)/\log n .$$

Or, on vérifie aisément que

$$((\log i)(1 + i \log i))^{-1} < (\log i)^{-1} - (\log(i+1))^{-1} < i^{-1}(\log i)^{-2} .$$

Soient alors deux réels A, B vérifiant $A \leqslant \theta(n)/n \leqslant B$ pour tout entier n, il vient

$$A \sum_{1\leqslant i<n} ((\log i)(1 + \log i))^{-1} < \pi(n) - \theta(n)/\log n < B \sum_{2\leqslant i<n} (\log i)^{-2} .$$

On en déduit

$$|\pi(n) \log n/n - \theta(n)/n| \ll (\log n)^{-1} .$$

Comme on vient de le montrer, améliorer l'approximation de $\pi(n) \log n/n$ revient à améliorer celle de $\psi(n)/n$. On est donc ramené à chercher une meilleure combinaison de factorielles que $\binom{2n}{n}$. ČEBIČEV a proposé

$$C(n) = n!\ [n/30]!([n/2]![n/3]![n/5]!)^{-1} .$$

C'est encore un coefficient multinomial et donc un entier, mais ce fait ne joue aucun rôle pour l'instant. En notant que, pour tout entier m et tout réel x, $[x/m] = [[x]/m]$, on obtient

$$\log C(n) = \sum_{i\geqslant 1} (1 + i(30) - i(2) - i(3) - i(5))\ \psi(n/i) ,$$

où $i(j)$ désigne l'entier 1 (resp. 0) si j divise (ne divise pas) i.

Le coefficient de $\psi(n/i)$ est une fonction de i de période 30 dont les trente premières valeurs sont

$$1,0,0,0,0,-1,1,0,0,-1,1,-1,1,0,-1,0,1,-1,1,-1,0,0,1,-1,0,0,0,-1,1,-1 .$$

De l'alternance des termes positifs et négatifs, on déduit l'encadrement

$$\psi(n) - \psi(n/6) < \log C(n) < \psi(n) .$$

Comme $\log n! = n(\log n - 1) + o(n)$, $\log C(n) \sim \log(2^{1/2}\ 3^{1/3}\ 5^{1/5}\ 30^{-1/30})\ n$, d'où $0,92129 < L_i \leqslant 1 \leqslant L_s < 1,10555$.

En utilisant un meilleur développement limité de $\log n!$ et l'inégalité

$$\theta(n) > \psi(n) - 2\psi(n^{1/2}) ,$$

on peut montrer de même l'encadrement

$$0{,}89477 < \theta(n)/n < \psi(n)/n < 1{,}11835 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 20000 .$$

Comme $1{,}11835/0{,}89477 > 5/4$, cela établit $\theta(5n/4) > \theta(n)$, et donc l'existence d'un nombre premier entre n et $5n/4$; grâce à une table de nombres premiers, on vérifie aisément que ce dernier point reste acquis dès que $n \geqslant 24$.

Au moment où ČEBIČEV faisait de tels calculs, de grandes tables sûres de nombres premiers n'étaient pas encore dressées ; elles étaient toutefois suffisantes pour établir l'inégalité $\theta(2n) > \theta(n)$ (pour $n \geqslant 1$), conjecturée par BERTRAND. De telles tables parurent bien avant la fin du siècle (ainsi que des tables de valeurs des fonctions θ et ψ) (travaux de GRAM et de GLAISHER) permettant dès lors de voir, par exemple, que l'inégalité $\psi(n)/n < 1{,}11835$ est vraie pour $n \geqslant 2$.

2. Les travaux de Sylvester.

Au cours des années qui suivirent les travaux de ČEBIČEV, plusieurs mathématiciens s'attachèrent à rechercher des combinaisons de factorielles plus efficaces que celles citées précédemment. Les efforts de SYLVESTER dans cette voie l'amenèrent à de substantiels progrès dans l'évaluation de L_i et L_s ainsi que des quotients $\psi(n)/n$, $\theta(n)/n$ (pour de grands domaines de valeurs de n). SYLVESTER obtint aussi une importante généralisation du résultat de ČEBIČEV sur la conjecture de BERTRAND en montrant que le plus grand facteur premier de k entiers consécutifs plus grands que k est strictement supérieur à k . Malheureusement pour leur auteur, ces résultats furent obtenus moins de cinq ans avant que HADAMARD et de LA VALLÉE POUSSIN ne réussissent à surmonter les difficultés d'analyse rendant alors inexploitable l'héritage de RIEMANN. Les méthodes élémentaires se trouvèrent dès lors quelque peu rejetées dans l'ombre en dépit des nombreuses recherches de démonstration non analytique du théorème fondamental des nombres premiers. On sait qu'il faudra attendre les travaux de SELBERG vers 1950 pour obtenir un tel résultat. Cependant, parmi les travaux élémentaires intéressants par la qualité des résultats obtenus comparée avec la simplicité des arguments employés, on peut citer (sans s'attarder sur les plus connus dus à SCHUR, BREUSCH, ERDOS ...) ceux de NAGURA [6] (resp. ROHRBACH et WEIS [7]) qui a (ont) prouvé par la méthode de ČEBIČEV l'inégalité $\pi(6n/5) > \pi(n)$ ($\pi(14n/13) > \pi(n)$) pour $n \geqslant 25$ ($n \geqslant 118$) avec une remarquable économie de calculs, et ceux de HANSON qui a montré l'inégalité

$$\nu(n) < 3^n$$

à l'aide du coefficient multinominal (naturel)

$$n!([n/2]![n/3]![n/7]!\ldots[n/b_k]!\ldots)^{-1} ,$$

où b_k est l'entier défini par

$$b_0 = 2 , \quad \sum_{i<k} b_i^{-1} + (b_k - 1)^{-1} = 1 \quad (\text{i. e. } b_k = 1 + b_1 b_2 \ldots b_k)$$

sans même utiliser la formule de Stirling explicitement (cf. [3]).

Revenons aux travaux de SYLVESTER. La méthode de ČEBIČEV a été appliquée au coefficient multinomial obtenu en observant que

$$1 + 1/6 + 1/10 + 1/210 + 1/231 + 1/1155 = 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/105$$

(resp. $1 + 1/6 + 1/10 + 1/14 + 1/105$

$$= 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/385 + 1/1001)$$

et jointe à une meilleure exploitation des inégalités obtenues (dans le §1, on s'est borné à l'encadrement trivial de la somme d'une série numérique alternée) ; SYLVESTER a ainsi prouvé les inégalités

$$0,946197 < L_i \leqslant 1 \leqslant L_s < 1,055186 \quad (\text{resp. } 0,95695 < L_i \leqslant 1 \leqslant L_s < 1,04423).$$

Plus intéressant ajourd'hui reste le résultat relatif au plus grand facteur premier d'entiers consécutifs. Soit $P(n) = \sup_{p|n} p$, et posons

$$P(n , k) = P((n + 1)(n + 2)\ldots(n + k)) .$$

SYLVESTER a établi l'inégalité $P(n , k) > k$; ce résultat, obtenu à l'aide de longs calculs a d'abord été retrouvé par SCHUR en 1929, avant d'être démontré plus brièvement par ERDÖS en 1934 (cf. [1]). En 1963, MOSER prouve $P(n , k) \geqslant 1 , 1k$, et, dix ans plus tard, HANSON établit $P(n , k) > 3/2\ k$ (cf. [4]) (hormis

$$(n , k) = (2 , 2) , (7 , 2) , (5 , 5)).$$

Signalons aussi un résultat de FAULKNER [2]. D'autres résultats ont été récemment obtenus relativement à $P(n , k)$ à l'aide de puissantes méthodes comme le grand crible ou la théorie de Baker (ce sont eux qui motivent cette étude historique) (pour une analyse détaillée, voir [5]).

Comme on va le voir, démontrer l'inégalité $P(n , k) > k$ (pour $n \geqslant k$) se ramène à obtenir un assez bon encadrement pour $\pi(n)$, $\log n/n$ (en fait, même un bon majorant de $\psi(n)/n$ peut suffire), et l'intérêt actuel de ce résultat de SYLVESTER peut être résumé par le théorème suivant (non énoncé explicitement dans [8]) :

THÉORÈME 1. - <u>Pour tout réel</u> $c > 0$, <u>il existe un réel</u> $b > 0$ <u>et un entier</u> K <u>tel que les inégalités</u> $K \leqslant bk \leqslant n$ <u>impliquent</u> $P(n , k) > ck$.

Joint au théorème fondamental des nombres premiers et à un résultat contemporain dû à STØRMER prouvant que $P(n , 2)$ tend vers l'infini avec n , ce théorème permet de montrer que, pour tout réel $c > 0$, l'inégalité (pour tout couple (n , k) d'entiers) $P(n , k) > \inf(n , ck)$ est vraie sauf peut-être à un nombre fini d'exceptions près.

Un autre intérêt des travaux de SYLVESTER est de montrer pourquoi l'on introduit des coefficients multinomiaux. On attribue généralement à ERDÖS et KALMAR la version simplifiée suivante des travaux de ČEBIČEV :

$$\prod_{n<p\leqslant 2n} p \text{ divise } \binom{2n}{n} ,$$

d'où

$$(\pi(2n) - \pi(n)) \log n \leqslant \log \binom{2n}{n} < n \log 4 ;$$

d'autre part $\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\pi(2n)}$ (observer que

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{i\geqslant 1} [2np^{-i}] - 2[np^{-i}] ,$$

quantité majorée par $\log 2n/\log p$), d'où

$$n \log 4 - \log(2n + 1) < \pi(2n) \log 2n .$$

En fait, la méthode de SYLVESTER permet de montrer le résultat suivant (la démonstration est détaillée dans [5]) :

THÉORÈME 2. — Soit $\nu(n , k)$ le p. p. c. m. de $(n + 1) , (n + 2) , \ldots , (n + k)$; alors,

(i) $k\binom{n+k}{k}$ divise $\nu(n , k)$

(ii) $\nu(n , k)$ divise $\nu(k)\binom{n+k}{k}$

(iii) les énoncés (i) et (ii) sont les meilleurs possibles.

De ce théorème, on déduit le résultat suivant.

COROLLAIRE.

(i) p. p. c. m. $(n , k)\binom{n+k}{n}$ divise $\nu(n + k)$,

(ii) Si $n \leqslant k$, $\nu(n + k)$ divise $\nu(k)\binom{n+k}{k}$.

De ce dernier énoncé, on déduit aisément les inégalités :

$$n^{3/2}\, 2^n \ll \nu(n) \ll 4^{n-(\frac{1}{2}\log n)^2} .$$

3. Une démonstration de l'inégalité $P(n , k) > k$, $(n \geqslant k)$.

Les améliorations et généralisations des résultats précédents relatives à $P(n,k)$ obtenues par l'auteur font l'objet d'un autre exposé ; on se borne donc ici à montrer comment déduire l'inégalité $P(n , k) > k$ (avec $n \geqslant k$) des résultats du §1. On montre également le théorème 1 du §2. Le lemme 1 qui va suivre n'est pas indispensable, mais indique les limites du procédé.

LEMME 1. — Si aucun des entiers $n + 1 , n + 2 , \ldots , n + k$ ne divise $\nu(k - 1)$, alors $P(n , k) \geqslant p_k$ où p_k désigne le k-ième nombre premier.

Démonstration. — Soient $i \neq j$ deux entiers parmi $1 , 2 , \ldots , k$. Pour tout nombre premier p , on a

$$v_p(\nu(k - 1)) \geqslant v_p(i - j) \geqslant \inf(v_p(n + i) , v_p(n + j)) .$$

Comme $(n + i)$ ne divise pas $\nu(k - 1)$, il existe un facteur premier p de $n + i$ tel que

$$\sup_{j \neq i} v_p(n + j) \leqslant v_p(\nu(k - 1)) < v_p(n + i) .$$

En associant à i le plus petit facteur premier (par exemple) possédant cette propriété, on obtient une injection de l'ensemble $(1 , 2 , \ldots , k)$ dans l'ensemble des facteurs premiers de $(n + 1)(n + 2)\ldots(n + k)$, ce qui prouve le résultat annoncé.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> $n \geqslant \nu(k - 1)$, $P(n , k) \geqslant p_k$.

Autrement dit, lorsque k est fixé, l'inégalité $\pi(P(n , k)) \geqslant k$ est assurée pour n assez grand.

LEMME 2. - <u>Soit</u> b <u>un réel</u> $\geqslant 1$, <u>si</u> $n \geqslant bk$ <u>alors</u>

$$\pi(P(n , k)) > ((b + 1) \log(b + 1) - b \log b)\, k\, (\log(b + 1)k)^{-1} .$$

<u>Démonstration</u>. — On va montrer que si $P(n , k) < p_k$, alors $\pi(P(n , k))$ satisfait à l'inégalité imposée ; cette réserve est sans importance puisque on cherche à prouver seulement $P(n , k) > k$ (d'ailleurs, le second membre de l'inégalité du lemme 2 est inférieur à k). Pour tout facteur premier p de $(n+1)(n+2)\ldots(n+k)$, soit i_p le plus petit entier (par exemple) i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ tel que

$$v_p(n + i) = \sup_{1 \leqslant j \leqslant k} v_p(n + j) .$$

Par suite,

$$v_p(\textstyle\prod_{j \neq i_p} (n + j)) \leqslant v_p((i_p - 1)!(k - i_p)!) \leqslant v_p((k - 1)!) .$$

Par conséquent, comme on a supposé $P(n , k) < p_k$, on obtient

$$\textstyle\prod_{1 \leqslant i \leqslant k - \pi(P(n,k))} (n + i) \leqslant (k - 1)!$$

Puisque $n \geqslant bk$, il vient

$$\Gamma(bk + k - \pi(P(n , k)) + 1) \leqslant \Gamma(k)\, \Gamma(bk + 1) .$$

Pour alléger les calculs, on abrège dans la suite $\pi(P(n , k))$ en Q . En appliquant les inégalités de Stirling, on est amené à

$$((b + 1) \log (b + 1) - b \log b)k + Q + ((b + 1)k - Q)\log(1 - Q(b + 1)^{-1} k^{-1}) \leqslant Q \log (b + 1) k .$$

Il n'y a plus alors qu'à observer que l'expression

$$Q + ((b + 1)k - Q)\log(1 - Q(b + 1)^{-1} k^{-1})$$

est positive (factoriser $(b + 1)k(1 - Q(b + 1)^{-1} k^{-1})$ pour conclure.

<u>Remarque</u>. — Le théorème 1 du §2 est clairement une conséquence du lemme 2.

COROLLAIRE. - Si $n + k \geqslant k^2$, $\pi(P(n , k)) > k/2$.

Si $k \geqslant 8$ et si $n + k \geqslant k^2$, l'inégalité $P(n , k) > k$ est réalisée.

LEMME 3. - Si $n = bk$,

$$((b + 1)\log(b + 1) - b \log b) \leqslant \theta(P(n , k))/k + 2\psi(((b + 1)/k)^{\frac{1}{2}}) .$$

Démonstration. — On emploie le théorème 2 du §2. D'une part, $k\binom{n+k}{k}$ divise $\nu(n , k)$, d'autre part, $\nu(n , k)$ divise $\nu(n + k)$ et, plus précisément, le produit des nombres premiers p étendu à tous les couples (p , i) vérifiant

$$p \mid (n + 1)(n + 2)\ldots(n + k) \quad \text{et} \quad p \leqslant (n + k)^{1/i} .$$

En se bornant à la première condition pour $i = 1$, et à la seconde pour $i > 1$, on obtient, grâce à la formule de Stirling,

$$k((b + 1)\log(b + 1) - b \log b \leqslant \theta(P(n , k)) + \psi((n + k)) - \theta((n + k)) ,$$

d'où le résultat annoncé. Dans la suite, on emploie le lemme 3 en majorant $\theta(x)$ et $\psi(x)$ par $1,12\ x$.

Supposons maintenant $k \geqslant 24$. Si $1 \leqslant b \leqslant 4$, d'après le §1, il existe alors un nombre premier entre n et $n + k$ $((n + k)/n = 1 + b^{-1} > 5/4)$ et donc

$$P(n , k) \geqslant n + 1 > k .$$

Si $4 \leqslant b \leqslant 90$, l'inégalité

$$((b + 1)\log(b + 1) - b \log b) \leqslant 1,12(1 + 2(b + 1/24)^{\frac{1}{2}})$$

n'est pas vérifiée et donc $P(n , k) > k$.

Si $b > 90$, alors, d'après le lemme 2, $\pi(P(n , k)) \geqslant 2,27k/\log k$.

Or, d'après le §1, pour $k \geqslant 24$,

$$\pi(k) \log k/k \leqslant \theta(k)/k + \sup_{k \geqslant 24}(\log k/k)\left(\sum_{2 \leqslant i < k} (\log i)^{-2}\right)\left(\sup_{k \geqslant 2} \theta(k)/k\right)$$
$$\leqslant 1,12(1 + 0,9) < 2,13 .$$

Reste à traiter le cas où $k \leqslant 23$. Cela est ramené à un petit nombre de vérifications par l'emploi du lemme 1 ou du lemme 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ERDÖS (P.). - A theorem of Sylvester and Schur, J. London math. Soc., t. 9, 1934, p. 282-288.

[2] FAULKNER (M.). - On a theorem of Sylvester and Schur, J. London math. Soc., t. 41, 1966, p. 107-110.

[3] HANSON (D.). - On the product of the primes, Canad. Math. Bull., t. 15, 1972, p. 33-37.

[4] HANSON (D.). - On a theorem of Sylvester and Schur, Canad. math. Bull., t. 16, 1973, p. 195-199.

[5] LANGEVIN (M.). - Sur la fonction plus grand facteur premier, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Groupe d'étude de Théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° G22, 29 p.

[6] NAGURA (J.). - On the interval containing at least one prime number, Proc. Japan Acad., t. 28, 1952, p. 177-181.

[7] ROHRBACH (H.) und WEIS (J.). - Zum finiten Fall des Bertrandschen Postulatz, J. reine und angew. Math., t. 214-215, 1964, p. 432-440.

[8] SYLVESTER (J.). - On arithmetical series, Messenger of Math., t. 21, 1892, p. 1-19 et p. 87-120.

(Texte reçu le 2 décembre 1976)

Michel LANGEVIN
Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud
2 avenue du Palais
92210 SAINT-CLOUD