

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

THONG NGUYEN-QUANG-DO

Une réciproque du théorème 90 de Hilbert

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, n° 2 (1975-1976),
exp. n° G18, p. G1-G3

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A20_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE RÉCIPROQUE DU THÉORÈME 90 DE HILBERT

par NGUYEN-QUANG-DO Thong

1. Introduction

Nous exposons ici certains résultats de cohomologie galoisienne des corps locaux dus à NAKAYAMA, TANNAKA et d'autres (voir références de [1]). Toutes les extensions seront supposées de degré fini.

Si K/k est une extension galoisienne, de groupe de Galois G , nous noterons $H^i(K/k)$ les groupes de cohomologie $\hat{H}^i(G, K^*)$ au sens de TATE [3]. Soit $N_{K/k}$ la norme de K^* à k^* . Nous désignerons respectivement par $N(K/k)$ et $N(k/K)$ l'image et le noyau de cet homomorphisme.

1.1. THÉORÈME 90 de Hilbert (bien connu !). - Si K/k est cyclique, de groupe de Galois engendré par σ , $N(k/K) = K^{*1-\sigma}$.

La généralisation cohomologique (tout aussi bien connue) de ceci est le théorème suivant :

1.2. THÉORÈME. - Pour toute extension galoisienne K/k , $H^1(K/k) = (1)$.

De façon plus naturelle, on aurait pu regarder le groupe $H^{-1}(K/k)$, qui, par définition, est égal au quotient $N(k/K)/K_G^{1-\sigma}$, où $K_G^{1-\sigma}$ désigne le groupe engendré par les éléments $a \cdot \sigma(a)^{-1}$, $a \in K^*$, $\sigma \in G = \text{Gal}(K/k)$. C'est ce qu'on va faire dans le cas d'une extension de corps locaux.

2. Structure de $H^{-1}(K/k)$.

Soit K/k une extension galoisienne de corps locaux. Par le corps de classes, on sait que $H^2(K/k)$ est un groupe cyclique, d'ordre égal à $[K : k]$ [3].

2.1. THÉORÈME. - Soit α un générateur de $H^2(K/k)$. Supposons l'extension K/k abélienne. Alors $H^{-1}(K/k)$ admet un système de représentants dans K^* formé des éléments $\alpha_{\sigma, \tau}^{-1}$, σ et τ parcourant $G = \text{Gal}(K/k)$.

Preuve. - Elle se fait par récurrence. Soit $G = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$ une décomposition de G en produit de groupes cycliques $Z_i = \langle \sigma_i \rangle$ d'ordre n_i , $n_{i+1} | n_i$. Soit $H = Z_1 \times \dots \times Z_{n-1}$, de corps fixe M .

Pour tout $x \in N(k/K)$, $N_{K/M}(x) \in N(k/M)$, donc (théorème 90) est de la forme $b \cdot \sigma_n(b)^{-1}$. Mais on sait que l'homomorphisme qui, à tout $\sigma \in H$, associe $\alpha_{\sigma, H} = \prod_{\tau \in H} \alpha_{\sigma, \tau}$, est un isomorphisme de H sur M^*/NK^* (c'est un cup-produit, [3], p. 177 ; pour une démonstration non cohomologique, voir [2]). Donc

$$b \equiv \alpha_{\sigma, H} \pmod{N(K/M)}, \quad \sigma \in H,$$

$$b \equiv \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_{\sigma_i, H}^{q_i},$$

d'où

$$N_{K/M}(x) \equiv \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_{\sigma_i, H}^{1-\sigma_n})^{q_i}.$$

Mais

$$\alpha_{\sigma_i, H}^{1-\sigma_n} = N_{K/M}(\alpha_{\sigma_n, \sigma_i} \alpha_{\sigma_i, \sigma_n}^{-1}) \quad (\text{calculs faciles de cocycles}),$$

d'où

$$N_{K/M}(x) = N_{K/M}(\prod_{i=1}^{n-1} \alpha_{\sigma_n, \sigma_i} \alpha_{\sigma_i, \sigma_n}^{-1})^{q_i} N_{K/M}(y^{1-\sigma_n}), \quad y \in K^*,$$

et l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

C. Q. F. D.

2.2. THÉORÈME. - Avec les hypothèses et les notations de (2.1.),

$$H^{-1}(K/k) \simeq A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n, \quad \text{où } A_i = Z_i \times Z_{i+1} \times \dots \times Z_n.$$

Preuve. - Pour tout couple (i, j) , $i < j$, regardons le groupe engendré par $\alpha_{\sigma_i, \sigma_j} \alpha_{\sigma_j, \sigma_i}^{-1} \pmod{K_G^{1-\sigma}}$. Soit $n_{i,j}$ l'ordre de ce groupe.

Soit J le sous-groupe de G obtenu en enlevant $Z_i \times Z_j$; soit L son corps fixe. Si $(\alpha_{\sigma_i, \sigma_j} \alpha_{\sigma_j, \sigma_i}^{-1})^{n_{i,j}} \in K_G^{1-\sigma}$, alors $(\alpha_{\sigma_i, \sigma_j}^J / \alpha_{\sigma_j, \sigma_i}^J)^{n_{i,j}} \in L_{G/H}^{1-\tau}$.

Or on a le lemme suivant.

LEMME. - Soit L/k galoisienne, de groupe de Galois isomorphe à $Z_1 \times Z_2$, où $Z_i = \langle \tau_i \rangle$, $i = 1, 2$, sont deux groupes cycliques d'ordre n_i , $n_2 | n_1$.
Alors $H^{-1}(L/k)$ est cyclique d'ordre n_2 .

En effet, soit L_i le corps fixe de H_i ($i = 1, 2$).

Avec des notations évidentes, si

$$(\beta_{\tau_1, \tau_2} \beta_{\tau_2, \tau_1}^{-1})^q = \theta_1^{1-\tau_1} \theta_2^{1-\tau_2}, \quad \theta_i \in L^*,$$

en prenant la norme de L à L_2 , on obtient :

$$\text{- au premier membre : } (\beta_{\tau_2, H_2}^{1-\tau_1})^q = (\beta_{\tau_2, H_2}^q N_{K/L_2}(\theta_3))^{1-\tau_1}, \quad \theta_3 \in L^*,$$

$$\text{- au second membre : } (N_{K/L_2} \theta_1)^{1-\tau_1};$$

d'où

$$\beta_{\tau_2, H_2}^{1-\tau_1} = (N_{K/L_2} \theta)^{1-\tau_1}, \quad \theta \in L^*$$

i. e.

$$\beta_{\tau_2, H_2}^q = \alpha \cdot N_{K/L_2} \theta, \quad \alpha \in k^*.$$

Mais $N_{L_1/k} \alpha = \alpha^{n_1} = (\alpha^{n_1/n_2})^{n_2} \in N(L_2/k)$, d'où (propriété connue du corps de classes) $\alpha \in N(K/L_2)$. Il en résulte que $\sigma_{\tau_2^q, H_2} \in N(K/L_2)$, d'où $\tau_2^q = 1$, et le lemme est démontré.

Reprenons la démonstration du théorème :

D'après le lemme, $n_{ij} = n_j$, et il en résulte facilement que

$$H^{-1}(K/k) \simeq A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n, \text{ où } A_i = Z_i \times Z_{i+1} \times \dots \times Z_n.$$

C. Q. F. D.

2.3. COROLLAIRE (réciproque du théorème 90 de Hilbert). - Soit K/k une extension abélienne de corps locaux telle que $H^{-1}(K/k) = \{1\}$. Alors l'extension K/k est cyclique.

Preuve. - Elle est immédiate.

Remarque. - Ce résultat n'est pas valable si K/k n'est pas supposée abélienne. En effet, si $G = \text{Gal}(K/k)$ est tel que G' (=groupes des commutateurs) et G/G' sont cycliques, on voit facilement que $H^{-1}(K/k) = \{1\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KUNIYOSHI (H.). - On a certain group concerning the p -adic number field, Tôhoku math. J., t. 1, 1950, p. 186-193.
- [2] NAKAYAMA (T.). - Über die Beziehungen zwischen den Faktorensystemen und der Normklassengruppe eines galoisschen Erweiterungskörper, Math. Annalen, t. 112, 1936, p. 85-91.
- [3] SERRE (J.-P.). - Corps locaux. - Paris, Hermann, 1968 (Act. scient. et ind., 1296 ; Publ. Inst. Math. Univ. Mancago, 8).

(Texte reçu le 12 avril 1976)

NGUYEN-QUANG-DO Thong
49 rue Pierre Valette
92240 MALAKOFF
