

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-MARC DESHOUILLERS

Sur la constante de Šnirel'man

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, n° 2 (1975-1976),
exp. n° G16, p. G1-G6

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A19_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONSTANCE DE ŠNIREL'MAN

par Jean-Marc DESHOUILLERS

Au milieu du 18^e siècle, GOLDBACH a affirmé que tout nombre pair [supérieur à 2] est somme de deux nombres premiers ; le premier résultat significatif est celui de V. BRUN qui démontre (vers 1920) que tout entier pair assez grand est somme de deux entiers admettant chacun au plus 9 facteurs premiers ; cette voie a été suivie par différents auteurs, et le dernier résultat en date est celui de CHEN FING RUN (1966-1973) qui démontre que tout entier pair assez grand est somme d'un nombre premier et d'un nombre ayant au plus deux facteurs premiers (comptés avec multiplicité) ; le second résultat (dans l'ordre chronologique) est dû à L. G. ŠNIREL'MAN qui démontre l'existence d'un entier κ (appelé constante de Šnirel'man) tel que tout entier supérieur à 1 est somme d'au plus κ nombres premiers. Les majorations successives de κ ont été (à ma connaissance) :

ŠAPIRO (1964) : $2 \cdot 10^{10}$

KLIMOV (1969) : $6 \cdot 10^9$

KLIMOV, PILTAI et ŠEPTITSKAJA (1972) : 115

DESHOUILLERS (1973) : 75, puis 67

VAUGHAN (1975) : 27.

En outre, VAUGHAN indique dans son article une autre méthode dont la limite théorique est 23. En reprenant cette méthode, pour une minoration de $A(x)$ (voir ci-dessous) pour les grandes valeurs de x , nous démontrerons :

THÉORÈME. - $\kappa \leq 26$.

La démonstration s'effectuera en 3 parties :

(I) Soit $A(x)$ le nombre d'entiers pairs inférieurs à x qui sont sommes de deux nombres premiers, on a

$$A(x) > \frac{x}{23,82} \text{ pour } x > \exp(244).$$

(II) On déduira alors du (I) que tout entier supérieur à $\exp(247)$ est somme de 26 nombres premiers.

(III) A l'aide des évaluations numériques de ROSER et SCHOENFELD relatives aux nombres premiers, on montrera que tout entier, supérieur à 1 et inférieur à $\exp(250)$, est également somme d'au plus 26 nombres premiers.

Je tiens à remercier R. C. VAUGHAN qui m'a aimablement communiqué le manuscrit de son article (à paraître dans le Journal de Grelle (J. für reine und angew.

Math.)).

1^{re} partie : Minoration de $A(x)$ pour x grand.

Dans toute cette partie, x désigne un nombre réel supérieur à $\exp(240)$, et k un nombre entier positif ou nul inférieur à 51. La lettre p (éventuellement indexée) désigne exclusivement un nombre premier impair, et on commettra l'abus d'écriture consistant à écrire $\pi(x)$ (resp. $\pi(x; k, \ell)$) pour le nombre de nombres premiers impairs inférieurs ou égaux à x (resp. et congrus à $\ell \pmod k$); notons $R_k(n)$ le cardinal de l'ensemble des couples de nombres premiers (p_1, p_2) appartenant à l'intervalle $(kx/2, (kx/2) + x]$ et dont la somme vaut n ; enfin, désignons par $R(k, x)$ un majorant du nombre de nombres premiers p situés dans un intervalle de longueur x et tels que $|h - p|$ est premier, où h est un entier pair supérieur à x .

On a la majoration

$$(1) \sum_n R_k(n) \leq \sum_{\substack{kx < n \leq (k+1)x \\ R_k(n) > 0}} R(n, (n - kx)) + \sum_{\substack{(k+1)x < n \leq (k+2)x \\ R_k(n) > 0}} R(n, (k+2)x - n).$$

D'après le lemme 8 de VAUGHAN et la remarque qui le suit, on a

$$(2) \quad R(h, x) < 10,57 x \cdot \log^{-2} x \prod_{p|h} \frac{p-1}{p-2} \text{ pour } x \geq 10^9.$$

De (1), (2) et de la majoration triviale de $R(h, x)$ si x est petit, on déduit :

$$(3) \sum_{k=0}^K \sum_n R_k(n) \prod_{p|n} \frac{p-2}{p-1} < \frac{10,57x((K+2)x)}{(1-\delta_2)^2 \log^2 x} + \frac{2(K+1)10,57x}{(1-\delta_2)^2 \log^2 x} + (2K+2)x^{2-2\delta_2}$$

pour tous nombres réels δ_1, δ_2 satisfaisant $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1/2$; minorons maintenant le membre de gauche de (3) en développant le produit

$$\prod_{p|n} \frac{p-2}{p-1} = \sum_{\substack{d \text{ impair} \\ d|n}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)};$$

on a :

$$\sum_n R_k(n) \prod_{p|n} \frac{p-2}{p-1} \geq (\pi(\frac{1}{2}kx + x) - \pi(\frac{1}{2}kx))^2 - \sum_{\substack{d \text{ impair} \\ \mu(d)=-1}} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{d|n} R_k(n).$$

Pour expliquer les simplifications intervenant dans les cas $d=3$ et $d=5$, nous ne traitons que le cas $k=0$ (pour des raisons évidentes d'écriture).

Pour $d=3$, on a :

$$\sum_{3|n} R_0(n) = 2\pi(x; 3, 1)\pi(x; 3, 2) + 1 \leq \frac{1}{2}(\pi(x; 3, 1) + \pi(x; 3, 2))^2 + 1 \leq \frac{1}{2}(\pi(x))^2.$$

Pour $d=5$, on a :

$$\sum_{5|n} R_0(n) = 2[\pi(x;5,1)\pi(x;5,4) + \pi(x;5,2)\pi(x;5,3)] + 1 \\ \leq \frac{1}{2}[(\pi(x;5,1) + \pi(x;5,4))^2 + (\pi(x) - \pi(x;5,4) - \pi(x;5,1))^2] \leq \frac{1}{2}(\pi(x))^2$$

on a donc :

$$\sum_n R_k(n) \prod_{p|n} \frac{p-2}{p-1} \geq 0,625(\pi(\frac{1}{2}kx + x) - \pi(\frac{1}{2}kx))^2 - \sum_{\substack{d \text{ impair} \geq 7 \\ \mu(d) = -1}} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{n \\ d|n}} R_k(n) .$$

En utilisant les majorations $((x/d) + 1)$ (trivial) et $2x/(\varphi(d) \log(x/d))$ (due à MONTGOMERY et VAUGHAN), ainsi que les estimations fournies par ROSSETER et SCHOENFELD pour la fonction φ , un calcul sans grand intérêt conduit à la minoration.

LEMME 1. - Soit $\sigma(k, x)$ un minorant de

$$(\pi(\frac{1}{2}kx + x) - \pi(\frac{1}{2}kx))x^{-1} \cdot \log x ;$$

pour $x \geq \exp(240)$ et $k \leq 100$, on a :

$$(4) \quad \sum_n R_k(n) \prod_{p|n} \frac{p-2}{p-1} \geq (x^2 / \log^2 x) \sigma(k, x) \{0,625\sigma(k, x) - 0,13005\} .$$

Reprenons alors (3) et (4) avec $\delta_1 = 0,03$, $\delta_2 = 0,2$ et $K = 50$:

$$\frac{A(52x)}{52x} > \frac{(0,97)^2}{10,57 \cdot 52} \sum_{k=0}^{50} \sigma(k, x) \{0,625\sigma(k, x) - 0,13005\} \\ - \frac{102 \cdot (0,97)^2}{(0,8)^2 \cdot 52 \cdot x^{0,06}} - \frac{102 \cdot (0,97)^2 \cdot \log^2 x}{10,57 \cdot 52 \cdot x^{0,42}} ,$$

soit, pour $x \geq \exp(240)$:

$$\frac{A(52x)}{52x} > 0,0017118 \sum_{k=0}^{50} \sigma(k, x) \{0,625\sigma(k, x) - 0,13005\} - 2 \cdot 10^{-6}$$

à l'aide des estimations de ROSSETER et SCHOENFELD, on trouve :

$$\sigma(k, x) \geq \frac{1}{1 + (\log(1 + k/2))/240} - \frac{k+1}{9120}$$

(pour k fixé, $\sigma(k, x)$ tend vers 1 quand x tend vers l'infini : c'est le théorème des nombres premiers) ; on en déduit que le $\sum$ vaut $24,526851\dots$ et on a bien la minoration (I).

2e partie : Représentation de grands nombres en somme de premiers

PROPOSITION 1. - Soit s un nombre entier pair, inférieur ou égal à 24 ; si $A(x) \geq \frac{x}{s}$ pour $x \geq N_0$, tout entier supérieur à $sN_0/2 + 62$ est somme d'au plus $s + 2$ nombres premiers.

Il est clair que cette proposition implique l'étape (II). Nous la déduirons de la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - Soit g une suite strictement croissante d'entiers positifs

ou nuls, contenant 0 ; on note $B(X)$ le cardinal de l'ensemble des éléments positifs de $\mathcal{B}$ ne dépassant pas X . Si k et n_0 sont deux entiers tels que $n \geq n_0$ implique $k.B(n) \geq n$, tout entier m supérieur à $k(n_0 + 1)$ peut s'écrire comme somme de k éléments de $\mathcal{B}$ et d'un entier appartenant à $\{0, k-1\}$,

Soit en effet n_1 le plus grand entier n tel que $k.B(n) < n$, s'il existe, et 0 sinon ; on pose

$$\mathcal{B}' = \{b - n_1 ; b \in \mathcal{B}, b > n_1\} ;$$

pour tout entier positif n , on a

$$B'(n) = B(n_1 + n) - B(n_1) ,$$

et on en déduit

$$k.B'(n) > n_1 + n - n_1 = n .$$

D'après le théorème 3' de [2], p. 20, pour tout entier positif n , il existe un entier h inférieur ou égal à k tel que n puisse s'écrire comme la somme de h éléments de $\mathcal{B}'$: $n = b_1' + \dots + b_h'$.

1er cas : $n_1 = 0$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, et on écrit

$$n = b_1' + \dots + b_h' + (k - h).0 , \text{ où les } b_i' \in \mathcal{B} .$$

2ème cas : $n_1 > 0$, alors $n_1 + 1$ appartient à $\mathcal{B}$ (sinon n_1 ne serait pas maximal), alors $n + hn_1 + (k - h)(n_1 + 1)$ est somme de k éléments de $\mathcal{B}$; donc, pour tout entier positif n , un au moins des nombres $n + kn_1$, $n + kn_1 + 1$, $\dots$, $n + kn_1 + (k - 1)$ est somme de k éléments de $\mathcal{B}$, d'où la proposition 2.

Pour obtenir la proposition 1, on commence par appliquer la proposition 2 à la suite B constituée par les éléments $1/2(p_i + p_j)$, à laquelle on adjoint 0 ; on peut prendre par hypothèse : $k = s/2$ et

$$n_0 = \begin{cases} N_0/2 & \text{si } N_0 \text{ est pair} \\ N_0/2 + 1/2 & \text{si } N_0 \text{ est impair,} \end{cases}$$

il s'ensuit que tout entier supérieur à $sN_0/4 + 5s/4$ est somme de $s/2$ éléments de $\mathcal{B}$ et d'un entier appartenant à $\{0, (s/2) - 1\}$, et, en multipliant par deux, tout entier supérieur à $sN_0/2 + 5s/2 + 2$ est somme d'au plus s nombres premiers et d'un entier appartenant à $\{2, s + 1\}$; puisque s est inférieur ou égal à 24, il suffit de vérifier que tout entier dans $\{2, 25\}$ est somme de deux nombres premiers.

3e partie : Représentation de petits nombres en somme de deux nombres premiers

PROPOSITION 3. - Soit m un entier supérieur ou égal à 2 : tout entier, inférieur à $\exp(17,70 + m10,21)$ et supérieur à 1, est somme d'au plus $m + 3$ nombres premiers.

La troisième étape résulte de cette proposition, avec $m = 23$.

On commence par la vérification directe de ce que tout entier positif pair, inférieur à 653, est somme de deux nombres premiers, puisque la différence entre nombres premiers consécutifs inférieurs à $2,686 \cdot 10^{12}$ est au plus 652 (cf. [1]), tout entier inférieur à $2,686 \cdot 10^{12}$ (et supérieur à 1) est somme d'au plus quatre nombres premiers.

Pour dépasser cette valeur, on utilise le principe suivant :

Supposons que l'on ait trois entiers X , Y et k tels que :

(a) Tout entier, supérieur à 1 et inférieur ou égal à X , est somme d'au plus k nombres premiers,

(b) Pour tout entier n dans l'intervalle $[X, Y]$, il existe un nombre premier entre $n - X$ et n ; alors tout entier inférieur à Y est somme d'au plus $k + 1$ nombres premiers.

Les estimations effectives de ROSSER et SCHOENFELD [2] nous permettent de remplacer l'étape (b) par la suivante :

(b') Pour tout entier n entre X et Y , il existe un nombre premier entre n et $n + X$ si

$$Y < X \frac{1 - \varepsilon(\log X) - 1,5/\sqrt{X}}{2\varepsilon(\log X) + 3/\sqrt{X}},$$

où la fonction ε est tabulée dans [3], page 267.

On peut alors démontrer la proposition 3 :

(a₁) Tout entier, supérieur à 1 et inférieur à $\exp(28,61)$, est somme d'au plus quatre nombres premiers.

(b₁) $\varepsilon(28) = 3,596 \cdot 10^{-5}$, et il existe donc un nombre premier entre n et $n + \exp(28,61)$ si $n \in [\exp(28,61), \exp(38,12)]$, d'où l'on déduit :

(a₂) Tout entier dans $[2, \exp(38,12)]$ est somme d'au plus cinq nombres premiers.

(b₂) $\varepsilon(35) = 1,8315 \cdot 10^{-5}$, et il existe donc un nombre premier entre n et $n + \exp(38,12)$ si $n \in [\exp(38,12), \exp(48,33)]$, et on a donc :

(a₃) Tout entier dans $[2, \exp(48,33)]$ est somme d'au plus six nombres premiers ...

... Puisque la fonction $\frac{1 - \varepsilon(\log X) - 1,5/\sqrt{X}}{2\varepsilon(\log X) + 3/\sqrt{X}}$ est croissante avec X , on obtiendra la proposition 3 (i.e. (a_m)).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRENT (R.P.). - The first occurrence of large gaps between successive primes, Math. of Comput., t. 27, 1973, p. 959-964.
- [2] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - Sequences, vol I. - Oxford, Clarendon Press, 1966.
- [3] ROSSER (J. B.) and SCHOENFELD (L.). - Sharper bounds for Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$, Math. of Comput., t. 29, 1975, p. 243-270.

(Texte reçu le 19 juillet 1976)

Jean-Marc DESHOUILERS
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE
