

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

GÉRALD TENNENBAUM  
**Sur la répartition des diviseurs**

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 17, n° 2 (1975-1976),  
exp. n° G14, p. G1-G5

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1975-1976\\_\\_17\\_2\\_A17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A17_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

23 février 1976

## SUR LA RÉPARTITION DES DIVISEURS

par Gérard TENNENBAUM

### 1. Historique

En relation avec le problème des suites primitives, (c'est-à-dire telles qu'aucun terme n'en divise un autre), BESICOVITCH a montré en 1934 [1] que, si l'on note  $d_a$  la densité naturelle de l'ensemble des entiers ayant un diviseur entre  $a$  et  $2a$ , alors

$$\liminf_{a \rightarrow \infty} d_a = 0.$$

E, 1935, ERDÖS montre dans [2] que  $\lim_{a \rightarrow \infty} d_a = 0$ , et sa démonstration (voir [4], page 256) montre en fait la relation

$$d_a = O(1/\log \log a).$$

En 1960, ERDÖS publie, en russe, un article [3] consacré à une estimation asymptotique de la quantité

$$A(x) = \text{card}\{n \leq x ; n = uv, u, v \leq \sqrt{x}\};$$

il démontre que, pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $x \geq x_0(\varepsilon)$ , on a

$$\frac{x}{(\log x)^{\alpha+\varepsilon}} < A(x) < \frac{x}{(\log x)^{\alpha-\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \alpha = 1 - \frac{\log(e \log 2)}{\log 2} = 0,0860 \dots,$$

et il annonce que les mêmes méthodes permettent une estimation du même type pour  $d_a$ ; cependant, aucune démonstration n'est donnée, et le résultat annoncé est inexact.

Nous montrons en fait que l'on a, pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $a \geq \alpha_0(\varepsilon)$ ,

$$\frac{1}{(\log a)^{\alpha+\varepsilon}} < d_a < \frac{c}{(\log a)^\alpha \sqrt{\log \log a}},$$

ou  $c$  est une constante absolue.

### 2. Principe des démonstrations.

(a) Borne supérieure. - Posons

$$\Omega_a(n) = \sum_{p \parallel n, p < a} \beta,$$

$$\Pi_{a,v}(x) = \sum_{n \leq x, \Omega_a(n)=v} 1.$$

On montre par récurrence que

$$(1) \quad \Pi_{a,v}(x) \ll \frac{x}{\log a} \frac{(\log \log a)^v}{v!}$$

lorsque  $v \ll \log \log a$  et lorsque  $x$  est assez grand par rapport à  $a$ .

On pose ensuite

$$\text{card}\{n \leq x; n = uv; a \leq u \leq 2a\} = v_a(x) = v_a^1(x) + v_a^2(x),$$

où les entiers  $n$  comptés dans  $v_a^1(x)$  (resp.  $v_a^2(x)$ ) sont tels que

$$\Omega_a(n) \leq \frac{\log \log a}{\log 2} \quad (\text{resp. } \Omega(n) > \frac{\log \log a}{\log 2}).$$

On a alors

$$(2) \quad v_a^1(x) \leq \sum_{(i+j) \leq (\log \log a / \log 2)} \Pi_{a,i}(2a) \Pi_{a,j}(x/a)$$

$$(3) \quad v_a^2(x) \leq \sum_{i > (\log \log a / \log 2)} \Pi_{a,i}(x) \leq c \sum_{i > (\log \log a / \log 2)} \frac{x}{\log a} \frac{(\log \log a)^i}{i!} + R_2(x)$$

où les  $n$  de  $R_2(x)$  sont tels que  $\Omega_a(n) \geq m \log \log a$ .

Pour  $m$  suffisamment grand ( $m$  absolue) on peut majorer  $R_2(x)$  par  $x/\log a$ .

On montre, grâce à un exercice de [5], le lemme suivant :

LEMME 1. - Pour  $0 < b < 1 < a$ , on a

$$(i) \quad \sum_{n > ax} \frac{x^n}{n!} = O(e^{ax} a^{-ax} x^{-1/2}),$$

$$(ii) \quad \sum_{n \leq bx} \frac{x^n}{n!} = O(e^{bx} b^{-bx} x^{-1/2}).$$

On peut donc, grâce à la majoration (1), estimer les quantités (2) et (3).

(b) Borne inférieure. - Nous aurons besoin du lemme suivant, dont la démonstration est donnée dans [6].  $\Pi'_{0,a}(x)$  désigne le nombre d'entiers sans facteurs carrés inférieurs ou égaux à  $x$  qui n'ont pas de facteurs premiers moindres que  $a$ .

LEMME 2. - Soit  $P(a) = P = \prod_{p \leq a} p$ . On a la formule asymptotique

$$\Pi'_{0,a}(x) = \prod_{p \leq a} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p > a} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)x + O(\sqrt{x} \varphi(P)),$$

où  $\varphi$  désigne la fonction d'Euler.

Le lemme suivant est particulièrement simple :

LEMME 3. - Soient deux familles d'entiers

$$a_1 < \dots < a_t$$

$$a'_1 < \dots < a'_u$$

si  $S$  désigne le nombre de quadruplets  $(i, j, r, s)$  tels que

$$a_i a'_j = a_r a'_s$$

et si  $N$  désigne le nombre de produits  $a_i a_j'$  distincts, alors

$$(t)^2 \leq N.S. .$$

Démonstration. - On appelle  $\alpha_m$  le nombre de couples  $(i, j)$  tels qu'il existe exactement  $m$  représentations de  $a_i a_j'$ , alors

$$\sum \alpha_m = N, \quad \sum m \alpha_m = tu., \quad \sum m^2 \alpha_m = S,$$

ce qui donne le résultat par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Le principe de la minoration est alors le suivant : on cherche deux familles d'entiers

$$a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_t \leq 2a$$

$$\frac{x}{4a} < a_1' < \dots < a_u' \leq \frac{x}{2a}.$$

telles que, conservant les notations du lemme 3, on ait

$$(C1) \quad S \leq tu \log^\epsilon a$$

$$(C2) \quad tu \geq x / (\log^{\alpha+\epsilon} a)$$

pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $a \geq a_s(\epsilon)$  et  $x > x(a)$ .

Si les conditions (C1) et (C2) sont réalisées, le lemme 3 montre alors que

$$N \geq \frac{(tu)^2}{S} \geq x(\log a)^{-\alpha-2\epsilon}$$

ce qui montre bien le résultat attendu.

Pour que les conditions (C1) et (C2) puissent être réalisées, nous allons choisir les  $a_i$  et les  $a_j'$  de façon très particulière :

Si  $b_1 < b_2 < \dots$  est la suite finie des entiers sans facteurs carrés qui ont exactement  $T = [\log \log a / 2D \log 2]$  (avec  $D = [\log \log a]$ ) facteurs premiers dans chaque intervalle

$$I(a, i) = (\exp \exp(\frac{i}{D} \log \log a), \exp \exp(\frac{i+1}{D} \log \log a)) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq D-2,$$

et qui n'ont pas d'autres facteurs premiers, alors les  $a_i$  seront les entiers de l'intervalle  $[a, 2a]$  qui sont de la forme  $b_i p_j$  avec  $p_j$  premier et les  $a_k'$  seront les entiers de l'intervalle  $[x/4a, x/2a]$  qui sont de la forme  $b_i c_k$  où les  $c_k$  sont tous des entiers sans facteurs carrés qui n'ont aucun facteur moindre que  $2a$ .

On montre dans ces conditions (voir [3] ou [6]) que l'on a

$$\sum \frac{1}{b_j} > (\log a)^{1-(\alpha/2)-\epsilon} \quad \text{et} \quad b_j \ll a^\epsilon$$

et donc que

$$t = \sum_j \{ \pi(\frac{2a}{b_j}) - \pi(\frac{a}{b_j}) \} \geq \frac{a}{\log^{(\alpha/2)+\epsilon} a}.$$

Mais on a aussi

$$u = \sum_j \{L_{0,2a}(\frac{x}{2ab_j}) - \Pi_{0,2a}(\frac{x}{4ab_j})\}$$

Pour  $x$  assez grand, le lemme 2 montre donc que

$$u \gg \frac{x}{a \log a} \sum_j \frac{1}{b_j} \geq \frac{x}{a(\log a)^{(\alpha/2)+\epsilon}};$$

on a donc

$$tu \geq \frac{x}{(\log a)^{\alpha+2\epsilon}} \text{ pour } a \geq a_0(\epsilon) \text{ et } x \geq x(a),$$

ce qui exprime que, pour le choix des  $a_i$  et des  $a'_j$ , la condition (C2) est réalisée.

Les calculs, conduisant à la majoration (C1) de  $S$ , sont particulièrement longs et pénibles. On en trouvera une rédaction détaillée dans [6].

### 3. Problèmes Liés.

Si, pour tout entier  $n$ , nous définissons

$$\rho_1(n) = \max_{d|n, d^2 \leq n} d \text{ et } \rho_2(n) = \min_{d|n, d^2 \geq n} d$$

les méthodes précédentes permettent une évaluation asymptotique de  $\sum_{n \leq x} \rho_1(n)$ .  
On obtient ainsi la formule asymptotique valable pour  $x \geq x_0(\epsilon)$

$$\frac{x^{3/2}}{(\log x)^{\alpha+\epsilon}} \leq \sum_{n \leq x} \rho_1(n) \leq c \frac{x^{3/2}}{(\log x)^\alpha \sqrt{\log \log x}},$$

où  $c$  est une constante absolue effective.

La minoration est une conséquence directe de la minoration de la quantité  $A(x)$  par ERDOS. La majoration s'obtient en majorant  $v_a(x)$  lorsque  $a$  est de la forme  $\sqrt{x}/2^k$ ,  $k \leq (\log \log x)/\log 2$ .

Par des méthodes analogues (voir [6]), on obtient en effet que lorsque  $a$  est de cette forme, on a

$$v_a(x) \leq c \frac{x}{(\log x)^\alpha \sqrt{\log \log x}}.$$

De l'inégalité

$$\sum_{n \leq x} \rho_1(n) \leq x v_{\sqrt{x}/2}(x) + \dots + \frac{x}{2^{k-1}} v_{\sqrt{n}/2^k}(x) + \frac{x^{3/2}}{\log x},$$

on déduit facilement la majoration annoncée.

Remarque 1 : L'estimation de  $\sum_{n \leq x} \rho_1(n)$  montre qu'en moyenne  $\rho_1(n)$  est proche de  $\sqrt{n}/\log^\alpha n$ . On peut cependant montrer (voir [6]) que, pour tout  $\beta \geq 0$ , la densité des entiers  $n$  tels que  $\rho_1(n) \gg n/\log^\beta n$  est nulle.

Remarque 2 : L'étude de  $\sum_{n \leq x} \rho_2(n)$  est plus facile que celle de  $\sum_{n \leq x} \rho_1(n)$ . On montre élémentairement la formule asymptotique (voir aussi [6]) :

$$\sum_{n \leq x} \rho_2(n) = \frac{\pi^2}{12} \frac{x^2}{\log x} + O\left(\frac{x^2}{\log^2 x}\right).$$

Ce dernier résultat exprime que les nombres  $n$  qui sont prépondérants dans cette moyenne sont ceux pour lesquels  $\rho_2(n)$  est grand, c'est-à-dire en fait les nombres  $n$  qui ont un "grand" facteur premier.

Dans la somme  $\sum_{n \leq x} \rho_1(n)$  au contraire ce sont les entiers  $n$  qui ont beaucoup de petits diviseurs qui sont importants, et en fin de compte les deux moyennes sont essentiellement constituées par des ensembles disjoints.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BESICOVITCH (A. S.). - On the density of certain sequences, Math. Annalen, t. 110, 1934, p. 336-341.
- [2] ERDÖS (P.). - Note on the sequences of integers no one of which is divisible by any other, J. London math. Soc., t. 10, 1935, p. 126-128.
- [3] ERDÖS (P.). - Sur une inégalité asymptotique en théorie des nombres [en russe], Vestnik Leningr. Univ., Serija Mat., Mekh. i Astr., 1960, n° 13, p. 41-49.
- [4] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. H.). - Sequences. Vol. I. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.
- [5] KNUTH (D. E.). - Fundamental algorithms. Vol. 1., 2nd print. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1969.
- [6] TENENBAUM (G.). - Etude asymptotique de fonctions arithmétiques liées aux diviseurs, Thèse 3e cycle, Université de Bordeaux-I, 1976.

(Texte reçu le 18 mai 1976)

Gérald TENENBAUM  
 Mathématiques  
 Université de Bordeaux-I  
 351 cours de la Libération  
 33405 TALENCE

---