Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Maurice Mignotte

Sur les facteurs premiers distincts d'entiers consécutifs

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1974-1975), exp. n° G5, p. G1-G6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° G5, 6 p.

9 décembre 1975

SUR LES FACTEURS PREMIERS DISTINCTS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS

par Maurice MIGNOTTE

(d'après K. RAMACHANDRA, T. N. SHOREY et R. TIJDEMAN [2])

1. Introduction.

Soit n un entier naturel. S'il existe g nombres premiers distincts $p_1,\dots,p_g$ divisant respectivement $n+1, \dots, n+g$, on dira que la propriété $G(n, g)$ a lieu.

On cherche à minorer $g(n)$, le plus grand entier g tel que $G(n, g)$ ait lieu. Pour l'historique de cette question, nous renvoyons le lecteur à [2].

L'originalité du travail de RAMACHANDRA, SHOREY et TIJDEMAN est d'utiliser la méthode de Gel'fond-Baker aussi bien dans la partie combinatoire de la preuve que dans la partie analytique. Leur résultat est le suivant.

THÉORÈME 1. - *Pour* $n \geq 3$, *on a* $g(n) > c(\log n)^3 (\log\log n)^{-3}$, *c constante positive.*

2. Partie combinatoire.

Le lemme combinatoire suivant, dû à Philippe HALL, est très utile.

LEMME 1 [1]. - *Une famille* $(E_i)_{i\in I}$ *de sous-ensembles finis d'un ensemble* E *possède un système de représentants distincts si, et seulement si, pour tout sous-ensemble fini* J *de* I, *le cardinal de* J *est majoré par celui de l'ensemble* $\bigcup_{j\in J} E_j$.

Le résultat ci-dessous repose essentiellement sur le lemme 1.

LEMME 2. - *Soit* $g(n)$ *défini comme plus haut. Alors on peut trouver un entier qui vérifie la propriété suivante*

(i) *Il existe des entiers positifs distincts, appartenant à l'intervalle*

$$]n, n+g(n)+1], \ n_0, n_1, \dots, n_t,$$

tels que

$$\omega\Big(\prod_{j=0}^{t} n_j\Big) \leq t \quad (\omega(m) = \text{nombre de facteurs premiers distincts de } m).$$

De plus, si t *est minimal,*

(ii) *Tout diviseur premier de* $\prod_{j=0}^{t} n_j$ *est majoré par* $g(n)$,

(iii) $\omega(n_0 \dots n_t) = t$.

Démonstration. - Dans l'énoncé du lemme 1, choisir $I = \{n + 1, \ldots, n + g(n) + 1\}$, et, pour m parcourant I, prendre pour E_m l'ensemble des diviseurs premiers de m. Par définition de $g(n)$, on ne peut trouver des représentants distincts des E_m. D'où (i).

Supposons maintenant t minimal. Si $p > g(n)$ divisait un certain n_j (p désigne un nombre premier), du fait que, pour $i \neq j$, on a $|n_i - n_j| \leqslant g(n)$, p ne divise pas n_i pour i distinct de j. On aurait alors $\omega(\prod_{0\leqslant i\leqslant t, i\neq j} n_i) \leqslant t-1$, ce qui contredit la minimalité de t (on ne peut avoir $t = 1$ puisque les n_i sont au moins égaux à 2). Cette contradiction achève la démonstration de l'assertion (ii). La démonstration de (iii) est immédiate.

Dans la suite, on travaille sur un choix de t, $n_0, \ldots, n_t$ tel que (i) et (ii) aient lieu. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des r diviseurs premiers de $n_0 \ldots n_t$. On définit une application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N} = \{n_0, \ldots, n_t\}, \quad \mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_t),$$

de sorte que $v_p(f(p))$ soit maximal parmi les $v_p(n_i)$. Posons

$$\mathcal{N}_0 = \{m \in \mathcal{N},\ m \notin f(\mathcal{P})\},\ N_0 = \operatorname{Card} \mathcal{N}_0,$$

$$\mathcal{N}_1 = \{m \in \mathcal{N},\ \exists\ p \text{ unique},\ f(p) = m\},\ N_1 = \operatorname{Card} \mathcal{N}_1,$$

$$\mathcal{N}_2 = \{m \in \mathcal{N},\ \exists\ p, p' \text{ distincts},\ f(p) = f(p') = m\},\ N_2 = \operatorname{Card} \mathcal{N}_2.$$

Par construction, $\operatorname{Card} \mathcal{P} < \operatorname{Card} \mathcal{N}$, donc $\mathcal{N}_0$ n'est pas vide.

Soit $n^* = p_1^{\alpha_1} \ldots p_t^{\alpha_t}$ un élément de $\mathcal{N}_0$. Des relations

$$p_j^{\alpha_j} | f(p_j), \quad |n^* - f(p_j)| \leqslant g(n)$$

résulte la majoration $p_j^{\alpha_j} \leqslant g(n)$. Donc $n^* \leqslant g(n)^t$. Ce qui implique

$$t \geqslant \log n / \log g(n). \tag{1}$$

En sens contraire, les majorations $p_j \leqslant g(n)$ pour $j = 1, \ldots, t$ impliquent (théorie des nombres premiers) la majoration

$$t < \frac{2g(n)}{\log g(n)} \tag{2}$$

Notre but est d'améliorer la minoration (1) (lemmes 3 à 5).

LEMME 3. - *Soient* $a_1, \ldots a_v$ *des entiers positifs tels que* $\min_i a_i \geqslant A$ *et* $\max_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant v}(a_i, a_j) \leqslant B$. *On a alors la minoration*

$$[a_1, \ldots, a_v] \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant v}(A^i B^{-i(i-1)/2}).$$

Démonstration. - Elle se fait par récurrence sur v.

LEMME 4. - *On a les minorations*

(i) $t \geqslant \dfrac{(\log n)^2}{2(\log g(n))^2}$ *si* $N_0 > \dfrac{\log n}{\log g(n)}$;

(ii) $t \geq \dfrac{N_0 \log n}{2 \log g(n)}$ si $N_0 \leq \dfrac{\log n}{\log g(n)}$.

Démonstration. - Soit M_0 le p. p. c. m. des éléments de π_0 . On peut appliquer le lemme 3 avec $A = n$, et $B = g(n)$ aux éléments de π_0 :

$$M_0 \geq \max_{1 \leq i \leq N_0} (n^i \, g(n)^{-i(i-1)/2}) .$$

Supposons d'abord $N_0 > \log n / \log g(n)$, le choix de $i = [\log n / \log g(n)] + 1$ conduit à la minoration

$$M_0 \geq \exp(\tfrac{1}{2} ((\log n)^2)/\log g(n)) \text{ , si } N_0 > \frac{\log n}{\log g(n)} .$$

D'autre part, on a toujours (avec $i = N_0$)

$$M_0 \geq n^{N_0} \, g(n)^{-N_0(N_0-1)/2} ,$$

et donc

$$M_0 \geq \exp(\tfrac{1}{2} N_0 \log n) \text{ , si } N_0 \leq \frac{\log n}{\log g(n)} .$$

Le lemme résulte alors de la majoration $M_0 \leq g(n)^t$, dont la démonstration est analogue à celle de la majoration de n^* .

COROLLAIRE. - Si $t < ((\log n)^2)/(18(\log \log n)^2)$ et $g(n) < (\log n)^3$, on a

$$N_1 \geq t(1 - 12 \frac{\log \log n}{\log n}) .$$

Démonstration. - Les inégalités $N_0 + N_1 + N_2 > t$ et $N_1 + 2N_2 \leq t$ impliquent $N_1 > t - 2N_0$. La conclusion résulte alors de cette minoration de N_1 et du fait que, sous les hypothèses du corollaire, on est nécessairement dans le cas (ii) du lemme 4.

Les éléments ν de π_1 sont de la forme $\nu = m_\nu \, p_\nu^{L_\nu}$, où

$$\nu = f(p_\nu) \text{ , } L_\nu = v_p(\nu) \text{ , et } p_\nu \neq p_{\nu'} \text{ si } \nu \neq \nu' .$$

Soit μ un réel vérifiant la condition : $[N_1/2]$ des m_ν vérifient $m_\nu \geq e^\mu$ et les autres vérifient $m_\nu \leq e^\mu$. Nous utiliserons divers encadrements de μ .

LEMME 5. - Si $N_1 \geq 3\sqrt{t}$, on a $\mu \leq \sqrt{2t} \log g$.

Démonstration. - Soit M_1 le p. p. c. m. des m_ν pour les $[N_1/2]$ éléments de π_1 tels que $m_\nu \geq e^\mu$. Le lemme 3 avec $v = [N_1/2]$, $a_j = m_j$, $A = e^\mu$, $B = g$, fournit

$$M_1 \geq \max_{1 \leq i \leq N_1/2} e^{\mu i} g^{-i(i-1)/2} .$$

Le choix de $i = [\sqrt{2t}] + 1$ conduit à l'inégalité

$$\mu \leq \sqrt{t/2} \log g + (1/\sqrt{2t}) \log M_1 .$$

Mais, comme plus haut, on a $M_1 \leq g^t$. D'où le résultat.

LEMME 6. - On a $g \log g > \max(N_0 \log n \, , \, \frac{1}{2} N_1 \mu)$.

Démonstration. - D'après un argument dû à ERDÖS, on a

$$n^{N_0} < \prod_{n_j \in \pi_0} n_j \leqslant \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{[g/p]+[g/p^2]+\cdots} \leqslant g! \leqslant g^g .$$

D'où $g \log g \geqslant N_0 \log n$. La seconde inégalité se démontre de même en considérant l'expression $\prod_{\nu \in \pi_1} m_\nu$, qui est elle aussi majorée par $g!$.

3. Preuve du théorème 1.

Supposons d'abord $N_0 \geqslant t/4$. D'après le lemme 4 (i), on a

$$t \geqslant \frac{1}{18} (\log n/\log\log n)^2 .$$

Et le lemme 6 fournit

$$g \log g \geqslant \frac{1}{72} \log^3 n \, (\log\log n)^{-2} .$$

Donc

$$g \geqslant \frac{1}{216} (\log n/\log\log n)^3 .$$

Le théorème est donc démontré dans ce cas. Il suffit donc de considérer le cas où g vérifie

(*) $$g < \frac{1}{216} (\log n/\log\log n)^3 .$$

D'après ce qui précède, on a alors $N_0 \leqslant t/4$. Les relations $N_0 + N_1 + N_2 > t$ et $N_1 + 2N_2 = t$ montrent que l'on a alors

(3) $$N_1 > t - 2N_0 \geqslant t/2 .$$

Ce qui montre, en particulier, que le lemme 6 s'applique. D'où

(4) $$t \geqslant \frac{1}{2} (\mu/\log g)^2 .$$

Ordonnons les m_ν , ν parcourant π_1 , par ordre croissant. Pour $K_1 = [N_1/2]$ et $K = [K_1^{1/4}]$, on a

$$1 \leqslant \prod_{1 \leqslant \nu \leqslant K_1 - K} (m_{\nu+K}/m_\nu) = m_{K_1-K+1} \cdots m_{K_1} \leqslant e^{K\mu} .$$

Il existe donc ν_0 , $1 \leqslant \nu_0 \leqslant K_1 - K$ tel que

$$1 \leqslant m_{\nu_0+K}/m_{\nu_0} \leqslant \exp\left(\frac{K}{K_1 - K} \mu\right) .$$

Ce qui implique

$$1 \leqslant m_{\nu_0+i}/m_{\nu_0+j} \leqslant \exp\left(\frac{2K}{K_1} \mu\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant K .$$

Du fait que les L_ν sont majorés par $\log(2n)/\log 2$, le principe des tiroirs montre que, parmi les L_ν (associés aux K nombres m_ν définis ci-dessus), il existe L_{ν_1} et L_{ν_2} tels que

$$|L_{\nu_1} - L_{\nu_2}| \leqslant \frac{2}{K} \log n .$$

Posons alors

$$\beta_1 = L_{\nu_1}\ ,\quad \alpha_1 = p_{\nu_1}/p_{\nu_2}\ ,\quad \alpha_2^{-1} = p_{\nu_2}^{L_{\nu_1}-L_{\nu_2}}\, m_{\nu_1}/m_{\nu_2}\ .$$

On vérifie que

$$(5)\qquad 0 < |\beta_1 \log \alpha_1 - \log \alpha_2| < 2g/n < \exp(\tfrac{1}{2}\log n)\ .$$

Les α_i sont des rationnels. La taille $s(p/q)$ d'un rationnel non nul mis sous forme irréductible étant défini par $s(p/q) = |q| + |p/q|$, on a

$$s(\alpha_1) \leqslant 2g \leqslant (\log n)^4\ ,$$

$$s(\alpha_2) \leqslant 2g^{|L_{\nu_1}-L_{\nu_2}|}\, e^{\mu} \leqslant \exp(\mu + \xi)\ ,\ \text{où}\ \xi = 1 + (6/K)\log n \log\log n\ .$$

$$|\log \alpha_2| \leqslant \frac{2K}{K_1}\mu + 6\xi \leqslant 3\mu K_1^{-3/4} + 6\xi\ ,\quad \frac{\log n - \mu}{\log g} \leqslant \beta_1 \leqslant 2\log n\ .$$

Supposons d'abord $\mu \leqslant 1/2 \log n$. Alors

$$\beta_1 \geqslant \frac{1}{6}\frac{\log n}{\log\log n} \qquad \text{(utiliser (*))}.$$

Supposons de plus $\mu \geqslant \xi^{9/8}$. Alors

$$K \geqslant (\log n)^{1/9} \geqslant \mu^{1/9}\ .$$

On peut alors appliquer le théorème 2 ci-dessous, avec

$$S_1 = \exp(2\mu)\ ,\quad A = 16\ ,\quad B = 5\ ,\quad \delta = 9/10\ ,$$

pourvu que l'on ait

$$\mu \geqslant (\log n)^{1/4}\ ;$$

si tel n'était pas le cas on aurait $\xi \leqslant 7(\log n)^{1/4} \log\log n$ et donc

$$K \geqslant (\log n)^{3/4} \quad\text{et}\quad g \geqslant t \geqslant K_1 \geqslant K^4 \geqslant (\log n)^3\ ,$$

en contradiction avec (*). La conclusion du théorème 2 fournit, en raison de (5), la minoration

$$\mu \gg \log n\ .$$

Et donc, grâce à (4) et au lemme 6, le résultat cherché

$$g \gg (\log n/\log\log n)^3\ .$$

Par contre, si la condition $\mu \leqslant \xi^{9/8}$ a lieu, on peut appliquer le théorème 2 avec $S_1 = \exp(\xi^{9/8})$, et on trouve

$$\xi \gg (\log n)^{8/9}\ ,\ \text{donc}\ K \ll (\log n)^{1/8}\ ,\quad t \ll (\log n)^{1/2}\ ,$$

ce qui contredit (1).

Le seul cas non traité est celui où μ vérifie

$$\mu \geqslant \tfrac{1}{2}\log n\ ,$$

mais cette inégalité, jointe à (4) et au lemme 6, implique

$$g \log^3 g \geqslant \tfrac{1}{8}(\log n)^3\ ,$$

en contradiction avec (*).

4. Enoncé du théorème d'approximation.

THÉORÈME 2. - Soient α_1 , α_2 deux nombres rationnels de taille majorée respectivement par $(\log S_1)^A$ et S_1 (> 27) , où A est une constante positive. Soit β_1 un entier vérifiant

$$\frac{2 \log S_1}{\log \log S_1} \leqslant |\beta_1| \leqslant (\log S_1)^B \qquad (B \text{ constante } \geqslant 1) .$$

Alors, si de plus

$$|\log \alpha_2| \leqslant (\log S_1)^\theta , \quad 0 < \theta < 1 ,$$

il existe une constante positive $C = C(A , B , \theta)$, effectivement calculable, telle que

$$|\beta_1 \log \alpha_1 - \log \alpha_2| > \exp(- C \log S_1) ,$$

pourvu que le membre de gauche ne soit pas nul.

Démonstration. - C'est un cas particulier du théorème d'approximation de [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] HALL (P.). - On representatives of subsets, J. London math. Soc., t. 10, 1935, p. 26-30.

[2] RAMACHANDRA (K.), SHOREY (T. N.) and TIJDEMAN (R.). - On Grimm's problem relating to factorisation of a block of consecutive integers (à paraître).

(Texte reçu le 21 avril 1975)

Maurice MIGNOTTE
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG