

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

KHYRA GÉRARDIN

Automates. Séries rationnelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1974-1975), exp. n° G4, p. G1-G5

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A7_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AUTOMATES. SÉRIES RATIONNELLES

par Khyra GÉRARDIN

1. Définition d'un automate : Rappels.

Un automate $\mathcal{A}$ est défini par la donnée de trois ensembles U , X , N , et de deux applications s , t :

U est l'ensemble des états.

X est l'ensemble des entrées.

N est l'ensemble des sorties.

t , une application de $U \times X \rightarrow U$, est dite application de transfert.

s , une application de $U \times X \rightarrow N$, est dite application de sortie.

Fonctionnement d'un automate. - Un automate fonctionne de la manière suivante :

Si R est une bande divisée en cases (R pouvant éventuellement être infinie), U un organisme pouvant changer d'état en se déplaçant vers la droite sur R , et lisant sur R une suite de symboles de X , lorsque U arrive sur R dans l'état a , devant la case i de R il lit la lettre x , et il écrit $s(a, x)$ dans cette case i . Il se déplace vers la droite en changeant d'état, et il se met dans l'état $t(a, x)$. Si la $(i + 1)$ -ième case de R n'est pas vide, le processus recommence avec l'état $t(a, x)$. Si la $(i + 1)$ -ième case est vide, l'automate s'arrête.

Automates dynamiques. - On notera X^* le monoïde libre engendré par X , N^* celui engendré par N .

On prolonge l'application $t : U \times X \rightarrow U$ à $U \times X^* \rightarrow U$ de la manière suivante : On notera T ce prolongement.

Si $x \in X$, $T(a, x) = t(a, x)$, $\forall a \in U$, $\forall x \in X$.

Sinon, on définit T par récurrence :

$$T(a, xp) = T(t(a, x), p), \quad a \in U, \quad x \in X, \quad p \in X^*.$$

$$T(a, e) = a, \quad \forall a \in U, \quad e \text{ étant le mot vide de } X^*.$$

De la même manière, on prolonge l'application $s : U \times X \rightarrow N$ à $U \times X^* \rightarrow N^*$: on notera S ce prolongement.

$$S(a, x) = s(a, x), \quad \forall a \in U, \quad x \in X.$$

$$S(a, xp) = s(a, x).S(t(a, x), p), \quad \forall a \in U, \quad x \in X, \quad p \in X^*.$$

$$S(a, e) = e', \quad e \text{ étant le mot vide de } X^*, \quad e' \text{ celui de } N^*.$$

Définition d'une application séquentielle. - Etant donnés deux monoïdes libres X^* , N^* , on dira qu'une application $f : X^* \rightarrow N^*$ est séquentielle, si on a les deux conditions suivantes :

1° $f(p)$ a même longueur que p , $\forall p \in X^*$.

2° $f(pq) = f(p).f(q)$.

Relations d'équivalence associée à une application séquentielle. - On désignera par R la relation d'équivalence sur X^* , définie par :

$(p R q) \iff (\text{dernière lettre de } f(p) = \text{dernière lettre de } f(q))$.

Pour un automate U , X , N , on définira une relation d'équivalence associée à l'état a de la manière suivante : Sur N^* ,

$(p R_a q) \iff (\text{dernière lettre de } S(a,p) = \text{dernière lettre de } S(a,q))$

où a est bien entendu un état de l'automate, et S le prolongement de la fonction de sortie de l'automate.

Une relation d'équivalence R sur un monoïde libre N^* est finie si N^*/R est fini. Une relation d'équivalence finie, compatible à droite avec la concaténation, est dite représentable.

PROPOSITION 1. - Toute relation représentable est associée à l'état a d'un automate possédant un nombre fini d'états, et réciproquement.

COROLLAIRE. - Si L_1 et L_2 sont deux relations représentables, $L_1 \cap L_2$ est représentable. Toute relation d'équivalence moins fine qu'une relation représentable est représentable.

2. Parties régulières d'un monoïde libre.

Définition. - On appelle partie régulière d'un monoïde libre X^* , les classes d'équivalence des relations représentables.

Conséquences. - L'intersection, la réunion finies de parties régulières sont régulières. Le complémentaire d'une partie régulière est régulier. Les parties finies sont régulières.

THÉOREME 1. - Pour qu'une partie A d'un monoïde libre X^* soit régulière, il faut et il suffit qu'il existe un monoïde fini M , un morphisme ϕ de X^* dans M , telle que A soit saturé pour ϕ , c'est-à-dire

$$A = \phi^{-1} \phi(A) .$$

Supposons que l'automate $\mathcal{A}$ soit sans sortie, que l'ensemble des entiers X soit fini, l'ensemble des états U est fini. Dans ce cas, une partie régulière A de X^* est associée à un état q_0 de l'automate de la manière suivante :

$$A = \{f \in X^* ; T(a_0, f) \in F\} , \text{ où } F \subset U .$$

A est, par définition, le langage de l'automate $\mathcal{A}$ par rapport à l'état initial a_0 et au sous-ensemble F des états finaux.

PROPOSITION 2. - Etant donné un automate $\mathcal{A}$ à états finis sans sortie, le langage associé à un état initial a_0 , où $a_0 \in U$, est une partie régulière.

PROPOSITION 3. - Le produit, la réunion de deux parties régulières sont parties régulières. Si A^* désigne le monoïde engendré par A , alors A^* est une partie régulière si A l'est.

THEOREME DE KLEENNE. - L'ensemble des parties régulières d'un monoïde libre X^* est le plus petit sous-ensemble contenant X , stable par réunion, itération, produit fini.

3. Définition d'une grammaire.

Définition. - Une grammaire contexte libre ou "context free" est définie par les données suivantes :

1° Un ensemble V fini, pointé, par un élément initial a_0 dit axiome de la grammaire,

2° Un ensemble fini de règles P ou productions

$$a_i \rightarrow p_i, \text{ où } a_i \in V, p_i \in V^*.$$

On notera U le sous-ensemble de V dont les éléments figurent dans au moins une production. U est le vocabulaire non terminal de la grammaire, X est le complémentaire de U dans V . X est le vocabulaire terminal. On suppose que $a_0 \in U$. On notera une grammaire

$$G = (U, X, P, a_0).$$

On définit une relation dans V^* de la manière suivante :

Si $p, q \in V^*$, alors $p \xRightarrow{*} q$, si

$$p = ua_i v, q = up_i v \text{ et } a_i \rightarrow p_i \in P, u, v \in V^*.$$

$p \Rightarrow q$ s'il existe une suite finie $p_1 p_2 \dots p_n$ telle que

$$p \xRightarrow{*} p_1, p_1 \xRightarrow{*} p_{i+1}, p_n \xRightarrow{*} q.$$

Par définition, le langage $L(G)$ de la grammaire $G = (U, X, P, a_0)$ est l'ensemble des mots f de X^* tel que $a_0 \Rightarrow f$.

Définition. - Une grammaire est dite régulière si $G = (U, X, P, a_0)$, et si les productions ont l'une des deux formes suivantes :

$$a_i \rightarrow p_j, a_i \in U, p_j \in X^*$$

ou

$$a_i \rightarrow p_j a_k, a_i a_k \in U, p_j \in X^*.$$

PROPOSITION 4. - Les grammaires régulières définissent les parties régulières.
Une partie régulière est appelée K-langage ou langage de Kleenne.

4. Liens. Séries rationnelles. Parties régulières. Automates.

Rappelons les notations :

X un ensemble fini, X^* le monoïde libre qu'il engendre, $\mathbb{Z}\langle X \rangle$ l'algèbre large de X^* sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^{\text{rat}}\langle X \rangle$ la sous-algèbre des séries rationnelles.

Si $a \in \mathbb{Z}\langle X \rangle$, $a = \sum_{f \in X^*} (a, f) f$.

On note $\text{Supp } a = \text{Support } a = \{f \in X^* ; (a, f) \neq 0\}$.

a est une série positive, si $(a, f) \geq 0$, $\forall f \in X^*$.

La somme, le produit de deux séries positives sont séries positives.

Si $a, b \in \mathbb{Z}\langle X \rangle$, et si a, b sont positives, alors, en notant $A = \text{Supp } a$, $B = \text{Supp } b$, il est facile de voir que

$$A \cup B = \text{Supp } (a + b),$$

$$A \times B = \text{Supp } (a \times b),$$

$$A^* = \text{Supp } a^*, \text{ si } a \text{ est quasi inversible,}$$

$$A \cap B = \text{Support de } (a \circ b), \text{ où } a \circ b \text{ est le produit d'Hadamard de } a \text{ et } b.$$

PROPOSITION 5. - Les parties régulières d'un monoïde libre X^* sont les supports des séries rationnelles positives.

N.B. - De la même manière, on peut définir des séries algébriques, des grammaires "context free", des automates "push down" dans C-langages.

PROPOSITION 5'. - Les C-langages sont les supports des séries algébriques positives.

THÉORÈME. - L'intersection d'un K-langage et d'un C-langage sont un C-langage.

Ceci n'est autre que la traduction ensembliste du théorème de Jüngen-Schützenberger [4] que nous rappelons ici.

THÉORÈME. - Le produit d'Hadamard d'une série rationnelle et d'une série algébrique est une série algébrique.

La partie concernant les séries algébriques n'a pas été exposée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FLIESS (Michel). - Sur certaines familles de séries formelles, Thèse Sc. math. Univ. Paris-7, 1972
- [2] GÉRARDIN (Khyra). - Séries rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Groupe d'étude de Théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° G1, 6 p.

- [3] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - On the definition of a family of automata, Information and Control, t. 4, 1961, p. 245-270.
- [4] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - On a theorem of R. Jungen, Proc. of the American mathematical Society, t. 13, 1962, p. 885-890.

(Texte reçu le 6 février 1975)

Khyra GÉRARDIN
12 rue Beccaria
75012 PARIS
