

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

HENRI CHAIX

Points extrémaux d'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ appartenant à un réseau

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1974-1975), exp. n° 26, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A4_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POINTS EXTRÉMAUX D'UN CONVEXE COMPACT DE $\mathbb{R}^n$
APPARTENANT À UN RÉSEAU

par Henri CHAIX

Introduction.

Etant donné, dans $\mathbb{R}^2$, un arc de courbe défini par une fonction différentiable, strictement convexe sur un segment $[a, b]$, de longueur L , on a le résultat classique suivant :

"Le nombre des points entiers sur l'arc de courbe est, à une constante près, majoré par $L^{2/3}$ ".

L'objet de cet article est de donner une généralisation de ce résultat dans $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME. - Soit C un domaine convexe et compact de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) de volume V strictement positif ; soit $\mathcal{R}$ un réseau de points de $\mathbb{R}^n$ de volume fondamental 1 ; si N est le nombre de points extrémaux de C appartenant au réseau $\mathcal{R}$, et si ces points n'appartiennent pas à un même hyperplan, il existe une constante universelle positive K_n telle que

$$(1) \quad N \leq K_n V^{(n-1)/(n+1)}.$$

REMARQUE 1. - Les hypothèses du théorème étant conservées, si on note S l'aire de la frontière de C , il existe une constante K'_n telle que :

$$(2) \quad N \leq K'_n S^{n/(n+1)}.$$

Ce résultat est la conséquence immédiate de l'inégalité isopérimétrique et du théorème énoncé. Toutefois, on remarquera que la démonstration de celui-ci donne directement la majoration de N en fonction de l'aire S et un meilleur majorant de la constante K'_n .

REMARQUE 2. - L'exposant $(n-1)/(n+1)$ de V ne peut être amélioré, et K_n admet un minorant strictement positif.

Soient P_1 le "paraboloïde" défini par : $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq x_n \leq r^2$, et P_2 le paraboloïde symétrique de P_1 par rapport à l'hyperplan $(x_n = r^2)$; le domaine $P = P_1 \cup P_2$ est compact et strictement convexe.

Prenons pour réseau $\mathbb{Z}^n$, le réseau des points entiers de $\mathbb{R}^n$. Tous les points frontières de P sont extrémaux. Le nombre N_P de points entiers de la frontière de P est alors donné par le nombre de points entiers de $\mathbb{R}^{n-1}$ contenus dans la boule $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq r^2$; ce nombre est équivalent au volume de cette boule.

Un rapide calcul montre que, pour V_P assez grand,

$$N_P \geq \frac{2(((n+1)/4)\pi)^{(n-1)/(n+1)}}{(\Gamma((n+1)/2))^{2/(n+1)}} V_P^{(n-1)/(n+1)}.$$

D'où une minoration de K_n , et le résultat.

REMARQUE 3. - Ce théorème permet de majorer en fonction de V , ou de S , le nombre de points d'un réseau sur une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ si celle-ci est frontière d'un domaine strictement convexe et compact.

Pour $n = 2$, on retrouve le résultat connu, mais il est obtenu ici, à l'aide d'une nouvelle démonstration.

La démonstration du théorème et la remarque 2 fournissent les inégalités suivantes :

$$(3) \quad K'_n < (2^{n^2-n-1} (C_{2n-3}^{n-1})^{n(n-1)} (n-1)^{(n(n-1)/2)+2} ((n-1)!)^{n^2-1} \frac{\Gamma^2((n-1)/2)}{\pi^{(n-2)/2} \Gamma(n/2)})^{1/(n+1)}$$

$$(4) \quad \left(\frac{(n+1)^{n-1} \pi^{n-1}}{2^{n-3} \Gamma^2((n+1)/2)} \right)^{1/(n+1)} < K_n < (2^n n^n (n!)^{n-1})^{1/(n+1)} K'_n.$$

Pour $n = 2$ et $n = 3$, on trouve :

$$K'_2 < 2, \quad 2 < K_2 < 6$$

$$K'_3 < 58, \quad 3 < K_3 < 537.$$

"Encubage" d'un domaine C . - Le domaine C de $\mathbb{R}^n$ sera dit "encubé" s'il existe un cube $\mathcal{K}$ de dimension n tel que :

- 1° Les $(n-1)$ -faces de $\mathcal{K}$ sont des hyperplans d'appui de C ,
- 2° Il existe deux $(n-1)$ -faces opposées de $\mathcal{K}$ notées k et k' telles que :
 - (α) il existe deux points de contact μ_1 (resp. μ'_1) de C avec k (resp. k') tels que la droite $\mu_1 \mu'_1$ soit orthogonale à l'hyperplan de k .
 - (β) C_1 étant la projection orthogonale de C sur l'hyperplan de k :
 - si $n > 2$, C_1 est encubé dans k .
 - si $n = 2$, $C_1 = k$.

LEMME 1. - Un domaine C de $\mathbb{R}^n$ compact et convexe étant donné, il existe une transformation $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ affine, de déterminant 1, telle que $\mathcal{C}(C)$ soit encubé

1° On construit deux hyperplans d'appui de C , H_1 et H'_1 parallèles, touchant C en μ_1 et μ'_1 .

Considérons alors deux nouveaux hyperplans d'appui de C , H_2 et H'_2 parallèles entre eux et parallèles à $\mu_1 \mu'_1$, touchant C en μ_2 et μ'_2 .

On construit de la même façon H_3 et H'_3 , parallèles entre eux et parallèles à $\mu_1 \mu'_1$ et $\mu_2 \mu'_2$, hyperplans d'appui de C dont les points de contact sont μ_3 et μ'_3 , ... Et ainsi de suite jusqu'à la construction de H_n et H'_n (parallèles entre eux et parallèles à $\mu_1 \mu'_1, \dots, \mu_{n-1} \mu'_{n-1}$) hyperplans d'appui de C dont les points de contact sont μ_n et μ'_n .

Le domaine délimité par ces hyperplans d'appui de C est un "hyperparallélépipède" de $\mathbb{R}^n$.

2° Soit $\mathcal{C}$ une des transformations affines de $\mathbb{R}^n$ de déterminant 1, transformant l'"hyperparallélépipède" en un hypercube $\mathcal{K}$.

On constate que $\mathcal{C}(C)$ est encubé dans $\mathcal{K}$.

LEMME 2. - Soit C un domaine encubé, compact et convexe de $\mathbb{R}^n$, de volume V , dont la frontière est une hypersurface d'aire S :

$$(5) \quad S \leq 2n(n!)^{(n-1)/n} V^{(n-1)/n}$$

$$(6) \quad V \geq a^n/n!.$$

La démonstration se fait par récurrence.

Si $n = 2$: Appelons ϖ le périmètre de la frontière du domaine, σ la surface du domaine, et a le côté du carré. On a :

$$\varpi \leq 4a \quad \text{et} \quad \sigma \geq a^2/2,$$

ce qui entraîne que $\varpi \leq 4\sqrt{2}\sigma^{1/2}$.

Si $n \neq 2$ (Nous utiliserons les mêmes notations que dans la définition de l'encubage, a sera le côté de l'hypercube $\mathcal{K}$) : Supposons alors que C_1 , projection de C sur k , vérifie l'hypothèse de récurrence :

$$(7) \quad v_{C_1} \geq a^{n-1}/(n-1)!.$$

S étant l'aire de la frontière de C , et C étant convexe :

$$(8) \quad S \leq 2na^{n-1}.$$

En coupant C par des parallèles à $\mu_1 \mu'_1$, on remarque que ces droites déterminent dans C des segments de longueurs supérieures à celles des segments obtenus dans la pyramide de sommet μ'_1 et de base C_1 . D'où :

$$(9) \quad V \geq \frac{1}{n} a v_{C_1}.$$

Les formules (7), (8) et (9) fournissent le résultat énoncé.

LEMME 3. - C étant un domaine compact et convexe de $\mathbb{R}^n$, il existe deux ellipsoïdes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ homothétiques dans un rapport ρ_n (ne dépendant que de n) tels que : $\mathcal{E}' \subset C \subset \mathcal{E}$.

On obtient pour ρ_n les majorations suivantes :

$$\rho_2 \leq 4\sqrt{2}$$

$$\rho_3 \leq 24\sqrt{3}$$

$$\rho_n \leq n! C_{2n-1}^n \sqrt{n} \quad (\text{si } n \geq 4).$$

On remarque immédiatement que $\rho_1 = 1$.

Grâce au lemme 1, il suffit de démontrer que si C est encubée dans K de côté a , il existe deux boules fermées B et B' dont les rayons sont dans un rapport ρ_n et telles que :

$$B' \subset C \subset B.$$

On remarque immédiatement que la sphère circonscrite au cube K de rayon $(\sqrt{n}/2)a$ fournit une boule B .

D'autre part, E l'enveloppe convexe des points $\mu_1, \mu_1', \mu_2, \dots, \mu_n, \mu_n'$ est contenue dans C , et son volume $V(E)$ vérifie la formule (6). De plus, E est un ensemble de $\mathbb{R}^n$ recouvert par C_{2n-1}^n n -simplexes.

En effet, soit μ un point extrémal quelconque de E , chaque point M de E appartient à un n -simplexe formé par μ et n autres points extrémaux de E .

Par suite, l'un au moins de ces n -simplexes, noté T , a un volume V_T vérifiant

$$(11) \quad V_T \geq (1/C_{2n-1}^n)(a^n/n!).$$

Si r est le rayon de la boule B' inscrite dans T , donc incluse dans C :
 $V_T = (1/n)rS_T$.

Mais S_T est majoré par $2na^{n-1}$ ("aire" du cube K). Ceci montre que :

$$r \geq a/(2n! C_{2n-1}^n).$$

D'où une majoration du rapport ρ_n d'homothétie entre B et B' .

On remarque que si $n = 2$, E est recouvert par deux triangles, et si $n = 3$, E est recouvert par quatre tétraèdres au plus. Ce qui permet d'améliorer ρ_2 et ρ_3 .

LEMME 4. - C étant un domaine convexe et compact de $\mathbb{R}^n$, soit S la frontière de C , hypersurface bornée, orientable, de courbure totale γ (que l'on peut supposer positive) :

$\int_S \gamma^{1/(n+1)} d\sigma$ est une intégrale invariante par transformation affine de déterminant 1.

Remarque : Le résultat est encore valable si S est une partie de la frontière de C .

Soit f une carte de S , c'est-à-dire une application différentiable, injective de rang $(n-1)$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^n$.

$$f : x \in U \longrightarrow p = f(x) \in \mathbb{R}^n.$$

(On suppose que la classe de différentiabilité de f est suffisamment élevée de sorte que les calculs, qui suivent, aient un sens.) Les notations seront celles utilisées par J. BREJNEVAL (*).

Si G est la matrice de la première forme quadratique fondamentale :

$$ds^2 = \overline{dp} \cdot dp = \overline{dx} G dx \quad \text{avec} \quad G = (\overline{\partial p / \partial x})(\partial p / \partial x).$$

Si on note

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{bmatrix},$$

l'hyperplan tangent en p à S est déterminé par les vecteurs

$$(\partial p / \partial x^1), (\partial p / \partial x^2), \dots, (\partial p / \partial x^{n-1}).$$

Le vecteur $(\partial p / \partial x^1) \wedge \dots \wedge (\partial p / \partial x^{n-1})$ (produit vectoriel dans $\mathbb{R}^n$) est normal à la surface S , sa norme est $\sqrt{\det G}$. Donc

$$v = 1/(\sqrt{\det G}) \left(\frac{\partial p}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial p}{\partial x^2} \wedge \dots \wedge \frac{\partial p}{\partial x^{n-1}} \right)$$

est unitaire et normal à S en p .

Soit F la matrice de la deuxième forme quadratique fondamentale :

$$F = - (\overline{\partial p / \partial x})(\partial v / \partial x).$$

D étant la matrice d'éléments

$$D_{ij} = \det((\partial p / \partial x^1), \dots, (\partial p / \partial x^{n-1}), (\partial^2 p / \partial x^i \partial x^j)),$$

le calcul de F montre que

$$\sqrt{\det G} F = D.$$

La courbure totale γ est le produit des valeurs propres de l'opérateur de courbure C tel que $dv + Cdp = 0$. Mais dans la base naturelle

$$\{(\partial p / \partial x^1), \dots, (\partial p / \partial x^{n-1})\}$$

de l'hyperplan tangent en p à S , C est représenté par $G^{-1} F$, donc :

$$\gamma = \det C = \det(G^{-1} F),$$

d'où :

$$\gamma = \frac{\det D}{(\det G)^{(n+1)/2}}.$$

Si, de plus, on suppose que le paramétrage de S est tel que v soit orienté vers l'intérieur de C , la courbure totale γ sera positive à cause de la convexité de C .

(*) BREJNEVAL (Jacques). - Géométrie des déformations des surfaces et équations de la mécanique des coques, Thèse Sc. math. Univ. Provence, Marseille 1972 (Pages 5 à 12).

Etant donné que $d\sigma = \sqrt{\det G} dx^1 dx^2 \dots dx^{n-1}$, on obtient :

$$(12) \quad \int_S \gamma^{1/(n+1)} d\sigma = \int_U (\det D)^{1/(n+1)} dx^1 \dots dx^{n-1}.$$

Si on transforme alors S par une transformation affine $\mathcal{C}$, de déterminant 1, les quantités D_{ij} se conservent, le déterminant D aussi, et donc l'intégrale considérée est invariante.

Démonstration du théorème.

1° Le polytope $\mathcal{P}$: Si $A_1, A_2, \dots, A_N$ sont les points extrémaux de $\mathcal{C}$ appartenant au réseau $\mathcal{R}$, l'enveloppe convexe $\mathcal{P}$ de $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ est un polytope (polyèdre borné) contenu dans $\mathcal{C}$. Les points $A_1, \dots, A_N$ sont encore points extrémaux de $\mathcal{P}$. Le volume de $\mathcal{P}$ n'est pas nul car $A_1, \dots, A_N$ sont supposés n'appartenant pas à un même hyperplan, $\mathcal{P}$ est donc de dimension n . Comme le volume de $\mathcal{P}$ est majoré par celui de $\mathcal{C}$, il suffit de démontrer le théorème pour le domaine $\mathcal{P}$.

2° "Encubage" de $\mathcal{P}$: Le théorème à démontrer étant invariant par les transformations affines de déterminant 1, il est loisible de supposer $\mathcal{P}$ "encubé". En effet, la démonstration conduira à limiter N en fonction de l'aire de $\mathcal{P}$, et le lemme 2 permettra de passer au volume de $\mathcal{P}$.

3° Les hyperplans H_A : Etant donné un point extrémal A de $\mathcal{P}$, soient p_i les milieux des 1-faces de $\mathcal{P}$ contenant A , et ε_A l'enveloppe convexe des p_i . On remarque que ε_A est un convexe de dimension au moins $n-1$ et que A n'appartient pas à ε_A . Comme ε_A est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés (famille que nous prendrons minimale), on peut trouver un tel demi-espace ne contenant pas A . H_A sera la frontière de ce demi-espace. L'hyperplan H_A sépare A de tous les autres points extrémaux de $\mathcal{P}$, ainsi que des milieux de toutes les 1-faces de $\mathcal{P}$.

4° Les "pyramides" π_A : L'intersection de $\mathcal{P}$ et du demi-cercle fermé H_A^+ (contenant A et limité par H_A) est une "pyramide" π_A . Comme H est le plan d'une $(n-1)$ -face de ε_A (la famille dont est extraite H_A étant minimale), on peut trouver n points p_i affinement indépendants dans H_A . π_A contient donc un n -simplexe dont les sommets appartiennent au réseau $\mathcal{R}'$ déduit de $\mathcal{R}$ par l'homothétie $(A, 1/2)$, réseau dont le volume fondamental est 2^{-n} . On trouve donc pour le volume $V(\pi_A)$ de la pyramide :

$$(13) \quad V(\pi_A) \geq 1/(n!2^n).$$

D'autre part, soit $S(\pi_A)$ la "surface latérale" de π_A , aire de l'intersection de H_A^+ et de la frontière de $\mathcal{P}$. Etant donné que H_A sépare π_A des autres pyramides π_{A_i} , on a l'inégalité :

$$(14) \quad \sum_{\ell=1, \dots, N} S(\pi_{A_\ell}) \leq S(\mathcal{P}).$$

5° Les cônes de Γ_A : D'après le lemme 3, il existe dans H_A deux ellipsoïdes $\mathcal{E}'_A$ et $\mathcal{E}_A$ homothétiques dans le rapport ρ_{n-1} et tels que :

$$\mathcal{E}'_A \subset (H_A \cap \mathcal{P}) \subset \mathcal{E}_A .$$

Γ_A sera le cône de sommet A et de base $\mathcal{E}_A$. Chaque cône Γ_A contient $\mathcal{P}$.

Si on note $\Gamma_A^+ = \Gamma_A \cap H_A^+$, on a :

$$(15) \quad v(\Gamma_A^+) \geq v(\pi_A) .$$

6° Les calottes paraboliques τ_A : Soit $\mathfrak{F}_A$ la frontière de $\mathcal{E}_A$ dans H_A . Considérons le paraboloïde dont l'hypersurface est tangente à la frontière du cône Γ_A le long de $\mathfrak{F}_A$. τ_A sera l'intersection de cette hypersurface avec l'intérieur de H_A^+ . On notera que τ_A est incluse dans Γ_A . L'homothétie qui transforme $\mathcal{E}_A$ en $\mathcal{E}'_A$, transforme τ_A en une calotte τ'_A contenue dans π_A . Il en résulte que $S(\tau'_A) < S(\pi_A)$ et donc :

$$(16) \quad S(\tau_A) < (\rho_{n-1})^{n-1} S(\pi_A) .$$

7° Les indicatrices ω_A : Soit ω l'hypersphère unité de $\mathbb{R}^n$. ω_A sera l'indicatrice sur ω de τ_A , c'est-à-dire l'ensemble des extrémités des rayons de ω parallèles aux normales à τ_A orientées vers l'intérieur (par exemple) du paraboloïde définissant τ_A .

Si A et A' sont deux points extrémaux,

$$(17) \quad \omega_A \cap \omega_{A'} = \emptyset .$$

En effet, soit m appartenant à ω_A , il lui correspond un point M de τ_A . Comme τ_A est incluse dans Γ_A , l'hyperplan W , tangent en M à τ_A , coupe tous les segments de génératrices de Γ_A déterminés par H_A^+ , donc en particulier ceux qui appartiennent à π_A . L'hyperplan W sépare ainsi A de tous les autres points extrémaux de $\mathcal{P}$.

Si on a également m appartenant à $\omega_{A'}$, on trouvera un second hyperplan W' , parallèle à W et séparant A' de tous les autres points extrémaux. De plus, m définit une même direction orientée, orthogonale à W comme à W' , définissant les demi-espaces devant contenir A et A' , ce qui est absurde.

En conclusion,

$$(18) \quad \sum_{\ell=1, \dots, N} S(\omega_{A_\ell}) \leq S(\omega) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} .$$

Remarque : Si on note $m = \varphi(M)$ et $\tau = \bigcup_{\ell=1}^N \tau_{A_\ell}$, on définit une application injective

$$\varphi : \tau \longrightarrow \omega .$$

φ étant de degré 1, comme $\int_{\tau} \gamma d\sigma$ est un invariant topologique, on a :

$$(19) \quad \int_{\tau} \gamma d\sigma = \int_{\varphi(\tau)} d\omega \leq \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad (\text{en utilisant (17) et (18)}) .$$

8° Calcul de l'intégrale $I_A = \int_{\tau_A} \gamma^{1/(n+1)} d\sigma$: Soit $\mathcal{C}'_A$ une transformation affine de H_A de déterminant 1, transformant $\mathcal{E}_A$ en une boule fermée de H_A de centre α et de rayon r .

Soit $\mathcal{C}_A$ la transformation affine de $\mathbb{R}^n$, prolongement de $\mathcal{C}'_A$, telle que la droite joignant A et son transformé $\hat{A}$ soit parallèle à H_A et que $\hat{A}$ se projette orthogonalement sur H_A en α . On notera $2h$ la distance de A à H_A .

La transformation $\mathcal{C}_A$ de $\mathbb{R}^n$ est de déterminant 1; elle transforme la calotte τ_A et le cône Γ_A , en une calotte $\hat{\tau}_A$ et en un cône $\hat{\Gamma}_A$ de révolution autour de la droite $\alpha\hat{A}$. Dans ces conditions, on a

$$S(\mathcal{E}_A) = S(\mathcal{C}'_A(\mathcal{E}_A)) = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{(n-1)\Gamma((n-1)/2)} r^{n-1},$$

et

$$(20) \quad v(\Gamma_A^+) = \frac{1}{n} (2h) S(\mathcal{E}_A) = \frac{4\pi^{(n-1)/2}}{n(n-1)\Gamma((n-1)/2)} h r^{n-1}.$$

Soient U l'ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $(x^1)^2 + \dots + (x^{n-1})^2 < r^2$, et f_A la carte de l'hypersurface $\hat{\tau}_A$ tels que :

$$p = f_A(x) = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-1} \\ (h/r^2)((x^1)^2 + \dots + (x^{n-1})^2) \end{bmatrix}.$$

Les notations étant celles utilisées au lemme 4, on en déduit :

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 2h/r^2 & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{et donc, } \det D = (2h/r^2)^{n-1}.$$

Le lemme 4 et la relation (12) montrent alors que :

$$(21) \quad I_A = \int_{\hat{\tau}_A} \gamma^{1/(n+1)} d\sigma = \int_U (2h/r^2)^{(n-1)/(n+1)} dx^1 \dots dx^{n-1} \\ = \frac{2^{2n/(n+1)} \pi^{(n-1)/2} (hr^{n-1})^{(n-1)/(n+1)}}{(n-1)\Gamma((n-1)/2)}.$$

En utilisant les relations (13), (15) et (20), on obtient la formule (23) en posant :

$$(22) \quad \lambda_n = (2^n(n-1)!)^{(n-1)/(n+1)} \left(\frac{(n-1)\Gamma((n-1)/2)}{2\pi^{(n-1)/2}} \right)^{2/(n+1)}.$$

$$(23) \quad I_A \geq \lambda_n^{-1}.$$

9° Majoration de N : On déduit immédiatement de l'inégalité (23), que

$$(24) \quad N \leq \lambda_n \sum_{\ell=1, \dots, N} I_{A_\ell}.$$

D'autre part, l'inégalité de Hölder montre que

$$(25) \quad \int_{\tau} \gamma^{1/(n+1)} d\sigma \leq \left(\sum_{\ell=1, \dots, N} S(\tau_{A_\ell}) \right)^{n/(n+1)} \left(\int_{\tau} \gamma d\sigma \right)^{1/(n+1)}.$$

En utilisant les formules (24), (25), (16), (14) et (19), on obtient le résultat suivant :

$$(26) \quad N \leq \lambda_n (\rho_{n-1})^{(n-1)n/(n+1)} (2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2))^{1/(n+1)} S^{n/(n+1)} .$$

Il suffit alors de porter dans cette formule les majorants de ρ_{n-1} (10), λ_n (22) et S (5) pour obtenir les conclusions du théorème (inégalités (1), (2), (3), (4)).

(Texte reçu le 8 juillet 1975)

Henri CHAIX
Mathématiques
Université de Provence
Place Victor Hugo
13331 MARSEILLE CEDEX 03
