Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

JEAN-LOUIS NICOLAS

Grandes valeurs des fonctions arithmétiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, nº 2 (1974-1975), exp. nº G20, p. G1-G5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A16_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° G20, 5 p.

26 mai 1975

GRANDES VALEURS DES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Jean-Louis NICOLAS

Soit $f : \underset{\sim}{N} \longrightarrow \underset{\sim}{R}$ une fonction arithmétique à valeur réelle. On dit que f est multiplicative si, pour m et n premiers entre eux, on a

$$f(mn) = f(m)\, f(n)\ .$$

En particulier, f est déterminée si l'on connaît $f(p^k)$ pour tout p premier et tout k entier.

THÉORÈME 1. - *Soit* f *multiplicative. On a*

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \iff \lim_{p^k\to\infty} f(p^k) = 0\ .$$

Ce théorème et sa démonstration se trouvent dans HARDY and WRIGHT ([2], ch. XVIII).

COROLLAIRE. - *Soit* $d(n)$ *le nombre de diviseurs de* n ; $d(n)$ *est une fonction multiplicative, et* $d(p^k) = k + 1$. *On a, pour* $\delta > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(n)}{n^\delta} = 0\ .$$

Démonstration. - On remarque que $d(n)/n^\delta$ est une fonction multiplicative et on applique le théorème 1.

THÉORÈME 2. - *On a*

$$\overline{\lim}\ \frac{\log d(n)\ \log\log n}{\log n} = \log 2\ .$$

Démonstration. - On fixe δ . La fonction $d(n)/n^\delta$ est bornée.

Pour $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}$, on a

$$\frac{d(n)}{n^\delta} = \prod_{i=1}^{r} \frac{k_i + 1}{p_i^{k_i\delta}}\ .$$

On constate que $(k + 1)/p^{k\delta} \leqslant 1$ dès que $p \geqslant 2^{1/\delta}$ et que

$$\frac{k+1}{p^{k\delta}} \leqslant 1 + \frac{1}{\delta \log 2} \quad \text{pour tout } p \text{ et } k\ .$$

On en déduit la majoration, valable pour n entier et δ réel > 0 :

$$\frac{d(n)}{n^\delta} \leqslant \left(1 + \frac{1}{\delta \log 2}\right)^{2^{1/\delta}}\ .$$

En faisant $\delta = ((1 + (1/2)\varepsilon)\log 2)/\log\log n$ on obtient :

$$\log d(n) \leqslant \frac{(1+\varepsilon)\log 2 \log n}{\log\log n}\ .$$

Dans l'autre sens, on considère le nombre :

$$n = p_1 \cdots p_j\ ,$$

produit de j nombres premiers distincts (on suppose $p_1 < \dots < p_j$). On a

$$d(n) = 2^j \quad \text{et} \quad \log n < j \log p_j \ ,$$

d'où :

$$\log d(n) = j \log 2 > \frac{\log n}{\log p_j} \log 2 \ .$$

Si les nombres $p_1 , \dots , p_j$ sont les j premiers nombres premiers, on a $\log n = \theta(p_j)$ en désignant par θ la fonction de Čebyšev (cf. [2], ch. XXII) :

$$\theta(x) = \sum_{p<x} \log p \ ,$$

et l'on sait que $\theta(x) \sim x$, d'où il vient :

$$\log d(n) \geqslant (1 - \varepsilon) \frac{\log n \log 2}{\log \log n} \ .$$

ce qui achève la démonstration.

Nombres hautement composés. - S. RAMANUJAN ([4]) donne la définition suivante : n est hautement composé (h. c.) si

$$(m < n) \Longrightarrow (d(m) < d(n)) \ .$$

Il semble assez raisonnable de considérer ces nombres pour étudier les "grandes" valeurs de la fonction $d(n)$. Malheureusement ils sont difficiles à déterminer (cf. [4] et [3]).

Nombres hautement composés supérieurs. - S. RAMANUJAN ([4], §32) définit aussi les nombres hautement composés supérieurs (h. c. s.) : Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $n \longmapsto d(n)/n^{\varepsilon}$ est bornée, et atteint son maximum en au moins un point : N_{ε}. On dit qu'un nombre N est h. c. s., s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que $d(n)/n^{\varepsilon}$ soit maximale pour $n = N$. On a donc, pour tout n,

$$\frac{d(n)}{n^{\varepsilon}} \leqslant \frac{d(N)}{N^{\varepsilon}} \ .$$

Tout nombre h. c. s. est hautement composé : Soit $m < N$. On a :

$$\left(\frac{d(m)}{m^{\varepsilon}} \leqslant \frac{d(N)}{N^{\varepsilon}}\right) \Longrightarrow \left(d(m) \leqslant \left(\frac{m}{N}\right)^{\varepsilon} d(N) < d(N)\right) \ .$$

Les nombres h. c. s. sont faciles à déterminer grâce au lemme suivant :

LEMME 1. - Soit f une fonction multiplicative vérifiant $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$. Alors, f est bornée, et atteint son maximum aux points :

$$N = \prod_p p^{\alpha_p} \ .$$

L'exposant α_p est tel que la fonction $\beta \longmapsto f(p^{\beta})$ soit maximale en $\beta = \alpha_p$.

Démonstration. - Pour p assez grand, comme $\lim_{(p^{\beta})\to\infty} f(p^{\beta}) = 0$, on a $\alpha_p = 0$, et le produit définissant N est un produit fini. Ensuite, soit $n = \prod_p p^{\beta_p}$, on a

$$f(n) = \prod_{p|n} f(p^{\beta_p}) \leqslant \prod_{p|n} f(p^{\alpha_p}) \leqslant f(N) \ .$$

On constate que $\log f$ (qui est une fonction additive) se traite comme une fonction aux variables séparées.

En appliquant le lemme 1 à la fonction $d(n)/n^{\varepsilon}$, on trouve :

$$\alpha_p = \left[\frac{1}{p^{\varepsilon} - 1}\right]$$

en désignant par $[u]$ la partie entière de u.

Il est commode de poser $x = 2^{1/\varepsilon}$; soit

$$\varepsilon = \frac{\log 2}{\log x} \quad \text{et} \quad x_k = x^{\log(1+1/k)/\log 2} .$$

On a alors :

$$(x_{k+1} < p \leqslant x_k) \iff (\alpha_p = k)$$

et l'on a, pour $N = \prod p^{\alpha_p}$:

$$(1) \qquad \begin{cases} \log N = \theta(x) + \theta(x_2) + \dots + \theta(x_k) + \dots \\ d(N) = 2^{\pi(x)}(\frac{3}{2})^{\pi(x_2)} \dots (\frac{k+1}{k})^{\pi(x_k)} + \dots \end{cases}$$

où θ est la fonction de Čebyšev, et $\pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1$. On sait que (cf. [1])

$$\theta(x) = x + O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$$

et que :

$$\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O(x \exp(-c\sqrt{\log x})) \quad \text{avec} \quad \mathrm{li}\, x = \int_2^x \frac{dt}{\log t} .$$

Pour $k > \log x/(\log 2)^2$, on a $x_k < 2$. Les formules (1) donnent :

$$\log d(N) = \pi(x) \log 2 + O(x^{(\log 3/2)/\log 2})$$

$$= (\mathrm{li}\, x)(\log 2) + O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$$

$$\log d(N) = (\log 2)(\mathrm{li}(\log N)) + O(\log N \exp(-c\sqrt{\log\log N})) .$$

Soit maintenant n quelconque. Il existe N hautement composé supérieur, tel que

$$\frac{N}{2\log N} \leqslant n \leqslant N .$$

Comme N est h. c., on a $d(n) < d(N)$ et l'on a

$$\log d(n) \leqslant \log 2(\mathrm{li}(\log n)) + O(\log n \exp(-c\sqrt{\log\log n})) .$$

On voit ainsi que l'ordre maximum de $d(n)$ est atteint pour les nombres hautement composés supérieurs. Remarquons également que les nombres hautement composés supérieurs correspondent aux abscisses des sommets de l'enveloppe convexe du graphe de $\log d(n)$ en fonction de $\log n$.

<u>Fonction $r(n)$</u>. - Soit $r(n)$ la fonction multiplicative qui vaut :

$r(p^k) = d(p^k) = k + 1$ si $p \equiv 1 \mod 4$,

$r(p^k) = 0$ si k impair, 1 si k pair pour $p \equiv 3 \mod 4$,

$r(2^k) = 1$.

Le nombre de décomposition de l'entier n en somme de deux carrés vaut $4r(n)$

(cf. [2], ch. XVI).

On peut définir de la même façon que pour la fonction d les nombres r-hautement composés supérieurs. Seuls comptent les nombres premiers $\equiv 1 \mod 4$. Et les formules (1) deviennent

$$\begin{cases} \log N = \theta_1(x) + \theta_1(x_2) + \ldots + \theta_1(x_k) + \ldots \\ r(N) = 2^{\pi_1(x)} (\frac{3}{2})^{\pi_1(x_2)} + \ldots + (\frac{k+1}{k})^{\pi_1(x_k)} + \ldots \end{cases}$$

avec

$$\theta_1(x) = \sum_{p \leq x, p \equiv 1 \bmod 4} \log p \quad \text{et} \quad \pi_1(x) = \sum_{p \leq x, p \equiv 1 \bmod 4} 1 .$$

Des relations (cf. [1], p. 72) :

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2} x + O(x \exp(- c \sqrt{\log x})) \quad \text{et} \quad \pi_1(x) = \frac{1}{2} \operatorname{li} x + O(x \exp(- c \sqrt{\log x}))$$

on déduit :

$$\log r(N) = \frac{\log 2}{2} \operatorname{li}(2 \log N) + O(\log N \exp(- c \sqrt{\log \log N})) .$$

On peut donner un développement limité de $\operatorname{li}(x)$:

$$\operatorname{li} x = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \ldots + \frac{(n-1)!\, x}{\log^n x} + O(\frac{x}{\log^{n+1}(x)}) .$$

Ce qui nous donne pour l'ordre maximum de $d(n)$:

$$\frac{\log 2 \log n}{\log \log n} + \frac{\log 2 \log n}{(\log \log n)^2} + O\ (\frac{\log n}{(\log \log n)^3}) ,$$

et pour $r(n)$:

$$\frac{\log 2 \log n}{\log \log n} + \frac{\log 2(1 - \log 2)\log n}{(\log \log n)^2} + O(\frac{\log n}{(\log \log n)^3}) .$$

Signalons enfin que S. RAMANUJAN a calculé ([4], §40) avec l'hypothèse de Riemann l'ordre maximum de $d(n)$: On a alors :

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O(x^{(1/2)+\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \theta(x) = x + O(x^{(1/2)+\varepsilon}) ,$$

et on écrit les formules (1) en tenant compte du 2e terme :

$$\begin{cases} \log N = \theta(x) + \theta(x_2) + O(x^{(1/2)+\varepsilon}) \\ \log d(N) = \pi(x) \log 2 + \pi(x_2) \log 3/2 + O(x^{(1/2)+\varepsilon}) . \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLANCHARD (A.). - Initiation à la théorie analytique des nombres premiers. - Paris, Dunod, 1969.

[2] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers. 3rd edition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1954.

[3] NICOLAS (J. L.). - Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan, Canad. J. Math., t. 23, 1971, p. 116-130.

[4] RAMANUJAN (S.). - Highly composite numbers, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 14, 1915, p. 347-400 ; and "Collected papers", p. 78-128. - Cambridge, at the University Press, 1927.

(Texte reçu le 16 juin 1975)

Jean-Louis NICOLAS
Département de mathématiques
UER des Sciences de Limoges
123 rue Albert Thomas
87100 LIMOGES