Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

François Gramain

Nombres de Pisot et fonctions moyenne-périodiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, nº 2 (1974-1975), exp. nº G11, p. G1-G6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A11_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° G11, 6 p.

3 mars 1975

NOMBRES DE PISOT ET FONCTIONS MOYENNE-PÉRIODIQUES

par François GRAMAIN

Les nombres de Pisot jouent un grand rôle dans les problèmes d'analyse harmonique. En 1955, SALEM et ZYGMUND, étudiant le problème de l'unicité du développement trigonométrique pour les ensembles du type Cantor, donnaient une caractérisation des nombres de Pisot.

Le théorème [3] dont la démonstration fait l'objet de cet exposé fournit une nouvelle caractérisation des nombres de Pisot en termes de séries trigonométriques.

Dans la suite de l'exposé, toutes les fonctions considérées sont de variable réelle, à valeurs complexes.

THÉORÈME 1. - *Soient* $\theta > 1$ *un nombre réel, et* $\Lambda(\theta)$ *l'ensemble des sommes finies de la forme* $\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k \theta^k$ *avec* $\varepsilon_k = 0$ *ou* 1 .

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) θ *est un nombre de Pisot,*

(ii) *Toute fonction continue bornée dont le spectre est contenu dans* $\Lambda(\theta)$ *est presque-périodique* (*au sens de Bohr*),

(iii) *Toute fonction moyenne-périodique dont le spectre est contenu dans* $\Lambda(\theta)$ *est presque-périodique*.

1. Rappels et première partie de la démonstration.

Rappelons d'abord la définition des notions intervenant dans cet énoncé.

DÉFINITION. - *Une fonction* f *est dite presque-périodique* (*au sens de Bohr*) *si elle est limite uniforme sur* $\mathbb{R}$ *de polynômes trigonométriques*.

Son spectre est l'ensemble des réels λ tels que

$$\hat{f}(\lambda) = \lim_{T\to+\infty} 1/2T \int_{-T}^{T} f(x) \exp(-2i\pi\lambda x)\, dx \neq 0 .$$

C'est un ensemble dénombrable. Cette définition du spectre coïncide presque avec celle du spectre d'une fonction borélienne bornée comme support de sa transformée de Fourier au sens des distributions : le spectre de f , en tant que fonction borélienne bornée, est la fermeture de son spectre en tant que fonction presque-périodique. De plus, on peut choisir pour approcher f des polynômes trigonométriques dont les fréquences sont dans le spectre de f . Pour plus de précisions on pourra se reporter à [2].

DÉFINITION. - Une fonction continue f est dite moyenne-périodique s'il existe une mesure à support compact μ, telle que $\mu * f = 0$.

DÉFINITION. - Une partie Λ de $\mathbb{R}$ est un ensemble cohérent de fréquences s'il existe deux constantes positives C et T telles que, pour tout polynôme trigonométrique P à fréquences dans Λ $(P(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \exp(2i\pi\lambda t))$, on ait

$$\sup_{t \in [0,T]} |P(t)| \geq C\|P\|_\infty .$$

En particulier, les "modèles" d'Yves MEYER sont des ensembles cohérents de fréquences, ce qui montre que $\Lambda(\theta)$ est un ensemble cohérent de fréquences si θ est un nombre de Pisot. Si θ n'est pas un nombre de Pisot, on montre que $\Lambda(\theta)$ n'est pas un ensemble cohérent de fréquences ([5] et [6]). En effet, la suite des polynômes trigonométriques

$$\psi_k(x) = \cos \pi x \ldots \cos \pi\theta^k x \exp i\pi(1 + \theta + \ldots + \theta^k) x$$

à spectres contenus dans $\Lambda(\theta)$, qui valent 1 à l'origine, tend vers zéro uniformément sur tout compact ne contenant pas l'origine d'après le théorème de PISOT.

THÉORÈME (PISOT). - Soient $\theta > 1$ et $\lambda > 0$ deux nombres réels.
Si $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|\lambda\theta^k\|^2 < +\infty$, alors θ est un nombre de Pisot. ($\|x\|$ désigne la distance de x à l'entier le plus proche.)

Si θ est un nombre de Pisot, alors $\Lambda(\theta)$ est un ensemble cohérent de fréquences, et la propriété (iii) résulte d'un théorème de J.-P. KAHANE [4]. Pour démontrer la propriété (ii), il suffit de remarquer qu'un ensemble Λ cohérent de fréquences est uniformément discret, c'est-à-dire que la distance entre deux éléments de Λ est minorée par un réel positif. (En effet, dans le cas contraire, il existe deux suites λ_n et λ'_n d'éléments de Λ telles que $\lambda'_n - \lambda_n \to 0$. Alors

$$s_n(x) = \exp(2i\pi\lambda_n x) - \exp(2i\pi\lambda'_n x)$$

est de norme $\|s_n\|_\infty = 2$ et $s_n(x)$ tend vers zéro uniformément sur tout compact $[0, T]$.) Soit alors f une fonction continue, bornée, à spectre contenu dans Λ. Sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est une somme de masses de Dirac portées par Λ. Donc, si K_n est un noyau de sommation, $f * K_n$ est un polynôme trigonométrique à spectre contenu dans Λ. La fonction f étant continue, $f * K_n$ converge vers f uniformément sur tout compact, donc sur $\mathbb{R}$ tout entier puisque Λ est un ensemble cohérent de fréquences et f est presque-périodique.

2. Fin de la démonstration : Un contre-exemple.

Pour démontrer la réciproque, nous allons construire une fonction continue, bornée, moyenne-périodique, à spectre contenu dans $\Lambda(\theta)$ et non presque-périodique si θ n'est pas un nombre de Pisot. Cette fonction g sera limite uniforme sur tout compact de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(x)$, où les φ_n seront des polynômes trigonométriques à fréquences dans $\Lambda(\theta)$. La fonction g sera bornée car

(1) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| \leq M$ pour tout x réel.

De plus, on fera en sorte que

(2) $\sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x) = g * K_N$ pour un noyau de sommation donné K_N .

Alors, si g est presque-périodique, elle est uniformément continue, donc $g * K_N$ converge vers g uniformément sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc $\|\varphi_n\|_\infty$ tend vers zéro. Il nous suffira donc de construire les φ_n de manière que cela ne soit pas réalisé. On voit qu'on va utiliser des polynômes trigonométriques du même type que les ψ_k introduits plus haut. De plus, la fonction g doit être moyenne-périodique.

Remarquons d'abord que, si h est un entier positif, l'ensemble $\Lambda(\theta^h)$ est contenu dans $\Lambda(\theta)$. Mais si θ n'est pas un nombre de Pisot, il existe une infinité de h tels que θ^h n'est pas de Pisot. Si on choisit h pour que $\theta^h > 2$, on peut construire g à partir de θ^h au lieu de θ . Alors $\Lambda(\theta^h)$ est de densité nulle, et il est même uniformément discret ; un théorème de Beurling-Malliavin [5] montre que la fonction g est moyenne-périodique. Construisons donc précisément la fonction g .

LEMME 1. - <u>Soient</u> $f_n(x) = \prod_{j=0}^{k(n)} \sin \pi(\theta^j x + \alpha)$, <u>où</u> α <u>est un rationnel</u>, $0 \leq \alpha < 1/2$, <u>et</u> $k(n)$ <u>une suite croissante d'entiers naturels</u>.

<u>Si</u> θ <u>n'est pas un nombre de Pisot</u>, f_n <u>tend vers zéro uniformément sur tout compact</u>.

Il suffit de montrer la convergence simple, car la suite $|f_n(x)|$ est décroissante, donc le théorème de Dini permettra de conclure à la convergence uniforme sur tout compact.

On a $f_n(0) = (\sin \pi\alpha)^{k+1}$, donc $f_n(0) \longrightarrow 0$ puisque $0 \leq \alpha < 1/2$.

Pour $x \neq 0$, supposons que $f_n(x)$ ne tend pas vers zéro. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\pi(\theta^j x + \alpha) = \frac{\pi}{2} + \pi q_j + \pi r_j \quad \text{avec} \quad q_j \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} |r_j|^2 < +\infty .$$

Si $\alpha = M/N$, on en déduit $2N\theta^j x \equiv 2Nr_j \pmod 1$, et le théorème de Pisot montre que θ est un nombre de Pisot.

Le lemme 1 est ainsi démontré. Une exponentielle de module 1 permet de ramener les fréquences de f_n dans $\Lambda(\theta)$, mais il faut encore corriger f_n pour obtenir une majoration du type (1). Posons

$$P_n(x) = f_n(x) \cos \pi(\theta^\ell x+\alpha) \cos \pi(\theta^m x+\alpha) \exp i\pi(1+\theta+\dots+\theta^k+\theta^\ell+\theta^m) x$$

avec $m = m(n) > \ell = \ell(n) > k(n)$. Le spectre de P_n est contenu dans $\Lambda(\theta)$, et d'après le lemme 1, $P_n(x)$ tend vers zéro uniformément sur tout compact.

Le lemme trigonométrique suivant montre que $\sum_{n\geq 0} |P_n(x)| \leq 1$, pour tout x réel.

LEMME 2. - <u>Soit</u> $\{a_j\}_{j\geq 1}$ <u>une suite de réels</u>. <u>On a</u>

$$\sum_{j\geq 1} |\sin a_1 \sin a_2 \ldots \sin a_{2j-2} \cos a_{2j-1} \cos a_{2j}| \leq 1 .$$

Donnons la démonstration très simple de ce lemme : On a

$$|\sin a_1 \ldots \sin a_{2j} \cos a_{2j+1} \cos a_{2j+2}| \leq |\sin a_1 \ldots \sin a_{2j}|$$

et

$$|\sin a_1 \ldots \sin a_{2j-2} \cos a_{2j-1} \cos a_{2j}| + |\sin a_1 \ldots \sin a_{2j}| \leq |\sin a_1 \ldots \sin a_{2j-2}| ,$$

car $|\cos a_{2j-1} \cos a_{2j}| + |\sin a_{2j-1} \sin a_{2j}|$ est un cosinus.

Si l'on note S_j la somme des j premiers termes de la série étudiée, on a montré que

$$S_{j+1} \leq S_{j-1} + |\sin a_1 \ldots \sin a_{2j-2}| = T_{j-1} .$$

Un calcul analogue montre que $T_{j-1} \leq T_{j-2}$. On a donc

$$S_{j+1} \leq T_1 = |\cos a_1 \cos a_2| + |\sin a_1 \sin a_2| \leq 1 .$$

La série à termes positifs étudiée est donc convergente, de somme majorée par 1 .

On déduit de ce lemme qu'il existe une sous-suite des P_n (que l'on notera encore P_n) telle que $\sum_{n\geq 1} P_n(x)$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue, bornée par 1 , et de spectre contenu dans $\Lambda(\theta)$. Cette fonction ne vérifie pas de condition du type (2), nous allons donc modifier un peu les P_n .

Le polynôme trigonométrique P_n est la somme de 2^{k+3} termes d'amplitude $2^{-(k+3)}$. Soit R_{n+1} la somme des termes de P_{n+1} dont les fréquences sont inférieures au double de la plus haute fréquence de P_n , et soit $P_{n+1} = Q_{n+1} + R_{n+1}$. Le polynôme trigonométrique R_{n+1} est la somme d'au plus $2^{m(n)+B}$ termes d'amplitude $2^{-(k(n+1)+3)}$, où B est une constante ne dépendant que de θ (par exemple $B < \log 2/\log \theta$). On a donc $\|R_{n+1}\|_\infty \leq 2^{B-3+m(n)-k(n+1)}$, et la série $\sum_{n\in \underset{\sim}{N}} \|R_{n+1}\|_\infty$ est convergente si $k(n+1) \geq Am(n)$ avec $A > 1$, ce que l'on supposera dans toute la suite.

Alors la série $\sum_{n\geq 1} Q_n(x)$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction $g(x)$ continue, bornée, dont le spectre est contenu dans $\Lambda(\theta)$.

Soit V_λ le noyau de de LA VALLÉE-POUSSIN. On a $\hat{V}_\lambda(x) = 1$ pour $|x| \leq \lambda$ et $\hat{V}_\lambda(x) = 0$ pour $|x| \geq 2\lambda$. Or 2 sup Spec $Q_n <$ inf Spec Q_{n+1} donc, pour un choix convenable d'une suite de λ tendant vers $+\infty$, $V_\lambda * g$ décrit l'ensemble des sommes partielles $\sum_{n=1}^{N} Q_n(x)$. Il en résulte que, si g est presque-périodique, donc uniformément continue sur $\underset{\sim}{R}$, $V_\lambda * g$ converge vers g uniformément sur $\underset{\sim}{R}$

et, par suite, $\|Q_n\|_\infty$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

Mais on a $\|P_n\|_\infty \leqslant \|Q_n\|_\infty + \|R_n\|_\infty$, donc $\|P_n\|_\infty$ tend aussi vers zéro. Alors un choix convenable des suites $\ell(n)$ et $m(n)$ entraîne que $\|f_n\|_\infty$ tend vers zéro. En effet, il suffit que $\ell(n) \geqslant Ak(n)$ et $m(n) \geqslant A\ell(n)$ avec $A > 1$ pour qu'on puisse appliquer deux fois le lemme classique suivant.

LEMME 3. - Soit $M > 2$. Il existe une constante $C > 0$ telle que

si φ est presque-périodique de spectre contenu dans $(-K, K)$

si ψ est périodique de fréquence supérieure à MK,

on a

$$\|\varphi\psi\|_\infty > C\|\varphi\|_\infty \|\psi\|_\infty .$$

Il suffit donc de montrer que $\|f_n\|_\infty$ ne tend pas vers zéro pour avoir démontré le théorème 1.

Si θ est transcendant, le théorème de Kronecker montre que $\|f_n\|_\infty = 1$.

Si θ est algébrique, on utilise un lemme dont la démonstration est voisine de celle de [5] (Proposition 10, page 229).

LEMME 4. - Soient θ un nombre réel, algébrique sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, et $P(X) = a_0 X^d + \dots + a_d \in \mathbb{Z}[X]$ son polynôme minimal. On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \prod_{j=0}^{k} \sin \pi(\theta^j x + \alpha) = \sup \prod_{j=0}^{k} \sin \pi(\varphi_j + \alpha) ,$$

le deuxième supremum étant pris sur tous les $(k+1)$-uples $(\varphi_0, \dots, \varphi_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tels que $a_0 \varphi_{d+j} + \dots + a_d \varphi_j \equiv 0 \pmod 1$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-d$.

On aura donc $\|f_n\|_\infty = 1$ pour $k(n) \geqslant d$ si on peut choisir des φ_j et α de sorte que

$$\alpha + \varphi_0 \equiv \alpha + \varphi_1 \equiv \dots \equiv \alpha + \varphi_k \equiv 1/2 \pmod 1 .$$

Pour cela il suffit qu'on ait

$$a_0((1/2) - \alpha) + \dots + a_d((1/2) - \alpha) \equiv 0 \pmod 1 .$$

Soit $s = 0$ ou $(1/2)$ défini par $s \equiv (1/2)(a_0 + \dots + a_d) \pmod 1$. Choisissons le signe des a_i pour que $a_0 + \dots + a_d = P(1) > 0$. (On ne peut pas avoir $P(1) = 0$ car P est irréductible.) Alors, pour $a_0 + \dots + a_d \neq 1$, il suffit de choisir $0 \leqslant \alpha = s/(a_0 + \dots + a_d) < 1/2$, et $g(x)$ n'est pas presque-périodique.

Dans le cas où $|P(1)| = 1$, il suffit de faire la même construction à partir de θ^h au lieu θ, où h est un entier positif tel que θ^h n'est pas un nombre de Pisot et que le polynôme minimal P_h de θ^h vérifie $|P_h(1)| > 1$. Un tel entier h existe, car il y a une infinité de h tels que θ^h n'est pas un nombre de Pisot et un théorème de BAKER [1] montre que $|P_h(1)| \longrightarrow +\infty$ quand $h \longrightarrow +\infty$. En effet, $|P_h(1)|$ est supérieur ou égal au produit des $|1 - \theta_j^h|$, où θ_j^h parcourt l'ensemble des conjugués de θ^h. Si $|\theta_j| < 1$, alors $|1 - \theta_j^h| \longrightarrow 1$. Dans ce produit, on a le facteur $|1 - \theta^h| \sim \theta^h$. Et si $|\theta_j| = 1$, le théorème de Baker montre que $|1 - \theta_j^h| \geq C_1 h^{-C_2}$ où C_1 et C_2 sont deux constantes positives. Le produit considéré est donc minoré à une constante près par $\theta^{(1/2)h}$ et tend vers $+\infty$ quand h tend vers l'infini. Cela achève la démonstration du théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER (Alan). - A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms, II, Acta Arithmetica, Warszawa, t. 24, 1973, p. 33-36.

[2] GRAMAIN (François). - Fonctions presques-périodiques (au sens de Bohr) et fonction zéta de Riemann, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Groupe d'étude de Théorie des nombres, 14e année, 1972/73, n° G17, 6 p.

[3] GRAMAIN (François) et MEYER (Yves). - Quelques fonctions moyenne-périodiques bornées, Colloquium Mathematicum (à paraître).

[4] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées, Ann. Institut Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 293-314.

[5] MEYER (Yves). - Algebraic numbers and harmonic analysis. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1972 (North-Holland mathematical Library, 2).

[6] MEYER (Yves). - Trois problèmes sur les sommes trigonométriques, Astérisque, 1, 1973, 87 p.

(Texte reçu le 20 mars 1975)

François GRAMAIN
28 avenue du Panorama
92340 BOURG-LA-REINE