Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Peter Bundschuh

Quelques résultats sur les approximations diophantiennes

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 1 (1974-1975), exp. n° 14, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_1_A9_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° 14, 10 p.

24 février 1975

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES

par Peter BUNDSCHUH

D'abord nous étudierons une certaine généralisation du théorème de Gel'fond-Schneider sur la transcendance de a^b. Notre théorème dit, sous une forme peu précise, que l'approximation simultanée des nombres a, b, a^b par des nombres algébriques de degré borné ne peut être très bonne, si l'on impose aux nombres complexes a et b certaines conditions naturelles. Cette question avait été étudiée auparavant par FRANKLIN, SCHNEIDER et ŠMELEV. Notre théorème implique quelques corollaires sur l'indépendance algébrique.

Puis nous donnerons quelques résultats nouveaux sur les approximations diophantiennes dans des corps de séries de Laurent formelles. De 1941 à 1946, WADE a publié trois articles sur la transcendance de certains éléments de tels corps ; ces études avaient été reprises par Mme GEIJSEL depuis 1971. Ici nous obtiendrons des mesures de transcendance par une méthode élémentaire.

1. Sur le théorème de Franklin-Schneider-Šmelev.

Soient a, b des nombres complexes arbitraires, $a \neq 0$, 1, et b irrationnel. Soit $\{(\eta_0, \eta_1, \eta_2)\}$ une suite infinie de triplets de nombres algébriques, satisfaisant à

(i) les η_i appartiennent à un corps de nombres fixé,

(ii) tous les η_0 sont irrationnels,

(iii) les conjugués des η_i sont uniformément bornés,

telle que l'inégalité

$$\max(|b - \eta_0|, |a - \eta_1|, |a^b - \eta_2|) \leq \exp(-\log^k H)$$

soit vérifiée, où H est une borne supérieure pour les hauteurs $h(\eta_0)$, $h(\eta_1)$, $h(\eta_2)$. Alors on a $k \leq 7$.

Cet énoncé fut démontré par FRANKLIN [9] sous une forme légèrement plus forte. Vingt ans après, SCHNEIDER ([13], Satz 27) a montré que la condition (i) de ce théorème peut être affaiblie et remplacée par la condition suivante

(i') $$d(\eta_i) \leq n,$$

où n est un nombre naturel fixé, et $d(\eta)$ dénote le degré exact du nombre algébrique η ; il a montré de plus que la condition (iii) est superflue, et enfin que l'on peut se débarrasser de la supposition asymétrique (ii) concernant la nature arithmétique des η_0 par comparaison avec celle des η_1, η_2. Néanmoins,

SCHNEIDER avait obtenu la conclusion $k \leqslant 5$. Malheureusement la démonstration de ce résultat est incomplète à la fin.

En 1971, ŠMELEV ([14], Theorem 2) a amélioré ce résultat en montrant $k \leqslant 4$ sous la condition (i') et une nouvelle condition asymétrique à la place de (ii) :

(ii') Si la suite des η_0 ne contient qu'un nombre fini de nombres irrationnels, alors $\log h(\eta_0) \geqslant c \log H$ doit être satisfait avec une certaine constante $c > 0$ pour tout η_0 rationnel.

Simultanément, nous avons montré ([3], Satz 2) que l'on peut avoir un peu plus que $k < 4$, mais maintenant sous la seule condition (i'). Le seul fait que nous n'avons plus besoin d'une condition asymétrique en η_0 , η_1 , η_2 nous permet de donner des applications qui seraient impossibles autrement (voir après la conclusion 2). Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - *Soient* $a \neq 0$, 1 , *et* b *irrationnel des nombres complexes arbitraires. Soit* $\varepsilon > 0$ (*resp.* n) *un nombre réel* (*resp. naturel*) *arbitraire. Alors l'inégalité*

$$\max(|b - \eta_0| , |a - \eta_1| , |a^b - \eta_2|) \leqslant \exp(- (\log H)^4 (\log \log H)^{-2+\varepsilon})$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions $(\eta_0 , \eta_1 , \eta_2)$ *en nombres algébriques* η_0 , η_1 , η_2 *avec* $d(\eta_i) \leqslant n$, $h(\eta_i) \leqslant H$ *pour* $i = 0 , 1 , 2$.

Le principe de la démonstration est le suivant : Nous montrons deux théorèmes qui donnent ensemble l'assertion précédente.

THÉORÈME A. - *Supposons que les hypothèses du théorème 1 concernant* a , b , ε , n *sont satisfaites. De plus, il existe une constante* $c = c(b) > 0$ *telle que* $|Qb - P| \geqslant \exp(- cQ)$ *soit rempli pour tout nombre entier* P *et tout nombre naturel* Q . *Alors l'énoncé du théorème 1 est vrai.*

Dans ce cas, où b ne peut pas être approché très bien par des nombres rationnels, la méthode de démonstration employée par FRANKLIN, SCHNEIDER et ŠMELEV fonctionne, ce qui est essentiellement la méthode de GEL'FOND (voir [3], p. 113-116). Le théorème 1 sera complété par la démonstration du théorème B.

THÉORÈME B. - *Supposons les hypothèses du théorème 1 concernant* a , b , ε , n *satisfaites. Supposons que l'inégalité*

$$|Qb - P| \leqslant e^{-Q} \tag{1}$$

admette une infinité de solutions (P , Q) *avec* $Q > 0$. *Alors l'inégalité*

$$\max(|a - \eta_1| , |a^b - \eta_2|) \leqslant \exp(- (\log H)^2 (\log \log H)^{3+\varepsilon}) \tag{2}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions (η_1 , η_2) *en nombres algébriques* η_1 , η_2 *avec* $d(\eta_i) \leqslant n$, $h(\eta_i) \leqslant H$ *pour* $i = 1 , 2$.

Esquisse de la démonstration du théorème B. - Remarquons d'abord que (1) possède même une infinité de solutions (P , Q) , avec P et Q premiers entre eux, parce que b est irrationnel, et les Q correspondants ne sont pas bornés. A toute telle solution (P , Q) , nous adjoignons d'une manière propre un nombre naturel H . Maintenant nous faisons l'hypothèse que le théorème B est faux, ce qui veut dire que l'inégalité (2) admet une infinité de solutions (η_1 , η_2) , avec $h(\eta_i)$ inférieur ou égal à ces H . Nous essayons d'obtenir une contradiction, et cela sera réalisé en cinq étapes.

1° A l'aide d'un lemme de Siegel bien connu nous construisons une fonction auxiliaire propre

$$\Phi(z) = \sum_{j,k=0}^{q-1} C_{jk} \exp(j + bk)z ,$$

avec $C_{jk} \in \mathbb{Z}$, $|C_{jk}| \leqslant C$, et non tous nuls telle que $|\Phi^{(s)}(x \log a)|$ soit "petit" pour $0 \leqslant s < s_0$, $0 \leqslant x < x_0$. Ici C , q , s_0 , x_0 dépendent du paramètre H d'une manière propre, et "petit" signifie une certaine fonction positive de H tendant suffisamment rapidement vers zéro avec $H \longrightarrow \infty$. Cette étape ne dépend pas de notre hypothèse.

2° De l'hypothèse, il s'ensuit que les

$$\Phi^{(s)}(x \log a) = \sum_{j,k=0}^{q-1} C_{jk}(j + bk)^s \, a^{jx}(a^b)^{kx}$$

ne sont pas seulement "petits" en valeur absolue, mais même "très petits" (en dépendance de H) pour les mêmes s , x . Là on utilise une minoration du type de Liouville pour les valeurs absolues des nombres algébriques

$$\Phi_{s,x} = \sum_{j,k=0}^{q-1} C_{jk}(j + \frac{P}{Q} k)^s \, \eta_1^{jx} \, \eta_2^{kx} \quad \text{si} \quad \Phi_{s,x} \neq 0 .$$

Parce que P/Q , η_1 (resp. η_2) sont "très proches" de b , a (resp. a^b) et parce que les $|\Phi^{(s)}(x \log a)|$ sont "petits" d'après le 1°, nous obtenons une bonne majoration pour $|\Phi_{s,x}|$ contredisant la minoration, ce qui montre $\Phi_{s,x} = 0$, et de là nous tirons facilement la conclusion de cette étape.

3° (Induction) Soit $0 \leqslant i < J$ (J proprement choisi en dépendance de H), et soient $|\Phi^{(s)}(x \log a)|$ "très petits" (comme au 2°) pour $0 \leqslant s < s_i = 2^i s_0$, $0 \leqslant x < x_i = 2^i x_0$; alors ces valeurs sont aussi "très petites" pour les s , x avec $0 \leqslant s < s_{i+1}$, $0 \leqslant x < x_{i+1}$. Ici les outils principaux sont une formule d'interpolation de Hermite, la formule intégrale de Cauchy, et encore une fois un procédé comme au 2° (comparaison des $\Phi^{(s)}(x \log a)$ aux $\Phi_{s,x}$ correspondants).

4° D'après le 2° et le 3° nous savons que $|\Phi^{(s)}(x \log a)|$ est "très petit" pour $0 \leqslant s < s_J$, $0 \leqslant x < x_J$, et nous utilisons les formules de Hermite et de Cauchy pour montrer que les $\Phi^{(s)}(0)$, $0 \leqslant s < q^2$ sont "très petits". Pour cette raison, et comme P/Q est "très proche" de b , les nombres rationnels $\Phi_{s,0}$ correspondants sont trop petits pour être non nuls.

5° Les équations $\Phi_{s,0} = 0$, $0 \leqslant s < q^2$, montrent qu'il existe deux paires (j , k) , (j' , k') , différant l'une de l'autre, telles que l'on ait

$$Q(j - j') = P(k' - k) .$$

Pour Q suffisamment grand (ce qui équivaut à H suffisamment grand), on a $P \neq 0$, et de là on sait que Q divise $k' - k$ et, de plus, $Q \leqslant |k' - k| < q$, d'où nous avons la contradiction désirée, si nous avons bien choisi q en dépendance (de H et donc) de Q.

2. Applications du théorème 1 et remarques.

En utilisant des idées de FEL'DMAN et de GEL'FOND, on peut gagner quelques corollaires de notre théorème 1, dont nous en présentons deux.

COROLLAIRE 1. - *Soit* $P(Y_1 , Y_2) \in \mathbb{Z}[Y_1 , Y_2]$ *irréductible sur* $\mathbb{Q}$, *et dépendant effectivement de* Y_1 *et de* Y_2. *Soit* $\mathfrak{b}$ *un zéro transcendant de la fonction* $P(z , z^z)$. *Alors l'inégalité*

$$|\mathfrak{b} - \eta| \leqslant \exp(- (\log h(\eta))^4 (\log \log h(\eta))^{-1}) \tag{3}$$

admet au plus un nombre fini de solutions en nombres algébriques η *avec* $d(\eta)$ *uniformément borné.*

CONCLUSION 1. - *Soit* (par exemple) $\mathfrak{b} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-c_k}$ *avec* $c_k = 2^{4^k}$. *Alors* $\mathfrak{b}$ *et* $\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}}$ *sont algébriquement indépendants sur* $\mathbb{Q}$.

Démonstration. - Nous suivons la méthode de FEL'DMAN [8], et posons

$$\nu = \max_{i=1,2} \text{degré}_{Y_i}(P) .$$

Supposons que (3) possède une infinité de solutions η avec, disons, $d(\eta) \leqslant d$. Si $P(Y_1 , Y_2) = \sum_{\sigma,\tau=0}^{\nu} a_{\sigma,\tau} Y_1^{\sigma} Y_2^{\tau}$, nous avons

$$P(\eta,\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}}) = P(\eta,\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}}) - P(\mathfrak{b},\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}}) = (\eta-\mathfrak{b}) \sum_{\sigma=1}^{\nu} A_{\sigma}(\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}})(\eta^{\sigma-1}+\eta^{\sigma-2}\,\mathfrak{b}+\ldots+\mathfrak{b}^{\sigma-1})$$

avec $A_{\sigma}(Y_2) = \sum_{\tau=0}^{\nu} a_{\sigma,\tau} Y_2^{\tau}$. De là nous tirons la conclusion

$$|P(\eta , \mathfrak{b}^{\mathfrak{b}})| \leqslant \exp(-\tfrac{1}{2} (\log h(\eta))^4 (\log \log h(\eta))^{-1}) \tag{4}$$

pour tous les η satisfaisant à (3) avec $h(\eta)$ suffisamment grand. Si $h_0(\eta) \geqslant 1$ est le coefficient le plus haut du polynôme minimal de η, et si $\eta^{(j)}$ $(2 \leqslant j \leqslant d(\eta))$ sont les conjugués de η, alors nous avons

$$P^*(Y_2) = h_0(\eta)^{\nu d(\eta)} \prod_{j=1}^{d(\eta)} P(\eta^{(j)} , Y_2) \in \mathbb{Z}[Y_2] , \text{ où } \eta^{(1)} = \eta . \tag{5}$$

Quand $h(\eta)$ est suffisamment grand, $P^*(Y_2)$ n'est pas identiquement zéro, mais

$$|P^*(\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}})| \leqslant \exp(-\tfrac{1}{3} (\log h(\eta))^4 (\log \log h(\eta))^{-1}) \tag{6}$$

à cause de (4), (5), $d(\eta) \leqslant d$, $h_0(\eta) \leqslant h(\eta)$, et $|\eta^{(j)}| \leqslant 1 + h(\eta)$. De (6) (avec [7], lemma 5), on déduit que l'une au moins des racines de $P^*(Y_2)$, disons ξ, satisfait à l'inégalité

$$|\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}} - \xi| \leqslant \exp(-\tfrac{1}{4} (\log h(\eta))^4 (\log \log h(\eta))^{-1}) . \tag{7}$$

Ici ξ est algébrique avec $d(\xi) \leqslant \nu.d = n$, et $h(\xi) \leqslant c h(\eta)^{2n} = H$ avec une

certaine constante $c \geqslant 1$ dépendante seulement de ν, d et des $a_{\sigma,\tau}$. Maintenant nous déduisons de (3) et (7) que le système

$$\max(|b - \eta| , |b^b - \xi|) \leqslant \exp(-\tfrac{1}{5}(2n)^{-4}(\log H)^4 (\log\log H)^{-1})$$

admet une infinité de solutions (η , ξ), avec $d(\eta)$, $d(\xi) \leqslant n$ (fixé) et $h(\eta)$, $h(\xi) \leqslant H$, ce qui contredit l'énoncé du théorème 1, si on l'applique avec $a=b=b$, $\eta_0 = \eta_1 = \eta$, $\eta_2 = \xi$ et $\varepsilon = 1/2$.

En ce qui concerne la conclusion 1, le nombre b est naturellement transcendant à cause du théorème de Liouville (voir [13], Satz 1) ; si l'on prend pour η les sommes partielles successives de la série pour b, on voit aussitôt que l'inégalité (3) du corollaire 1 admet une infinité de solutions en nombres rationnels η.

COROLLAIRE 2. - Soient a, b algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Supposons que l'inégalité

$$(8) \qquad \max(|b - \eta_0| , |a - \eta_1|) \leqslant \exp(-(\log H)^4 (\log\log H)^{-1})$$

admette une infinité de solutions (η_0 , η_1) en nombres algébriques avec $d(\eta_i) \leqslant n$ (fixé) et $h(\eta_i) \leqslant H$ pour $i = 0 , 1$. Alors a, b et a^b sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

La démonstration se termine comme en [14] (Corollary 3). Du corollaire 2 nous tirons la conclusion suivante.

CONCLUSION 2. - Soient (par exemple) $b = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-c_k}$, $c_k = 2^{4^k}$ et $\bar{b} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-d_k}$, $d_k = 4^{4^{2k}}$. Alors b, $\bar{b}$, $\bar{b}^b$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Par exemple, de [6] (théorème 3), il s'ensuit que b et $\bar{b}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Prenons de nouveau $\sum_{k\leqslant m} 2^{-c_k}$ (resp. $\sum_{k\leqslant m} 2^{-d_k}$) $(m=1,2,\ldots)$ comme η_0 (resp. η_1), et b (resp. $\bar{b}$) comme b (resp. a), on voit aisément que la supposition (8) du corollaire 2 est satisfaite, d'où l'énoncé s'ensuit. Remarquons que $h(\eta_0) = 2^{c_m} < 2^{d_m} = h(\eta_1) = H$ et de là $(\log h(\eta_0))/(\log H) \longrightarrow 0$ pour $m \longrightarrow \infty$, ce qui démontre que la condition (ii') (voir avant notre théorème 1) n'est pas satisfaite, de sorte que l'on ne peut pas déduire notre conclusion 2 de [14] (Corollary 3).

Remarques.

1° Dans son travail [14], Šmelev donne aussi un théorème du type suivant : Soient a, b des nombres complexes qui se laissent approcher simultanément "très bien" par des nombres algébriques de degré borné. Alors a^b est transcendant. Mais il a besoin de la condition (ii') qui peut être supprimée naturellement si l'on utilise notre méthode de démonstration esquissée plus haut.

2° Cette méthode donne aussi des résultats dans le domaine de la généralisation du théorème de Gel'fond-Schneider effectuée par BAKER qui a démontré [2] la transcendance du produit $\prod_{\nu=0}^{n-1} a_\nu^{b_\nu}$ sous les conditions suivantes : Soient $a_\nu \neq 0$, 1

et b_ν des nombres complexes algébriques tels que $1, b_0, \dots, b_{n-1}$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. WALLISSER [19] a montré que cette conclusion reste vraie si les b_ν ne sont plus nécessairement algébriques, mais se laissent approcher simultanément "très bien" par des nombres algébriques. Nous avons généralisé [4] ce théorème en montrant : Si $a_\nu \neq 0$, 1 sont des nombres algébriques, et si b_ν sont des nombres complexes tels que $1, b_0, \dots, b_{n-1}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors les $n+1$ nombres $b_0, \dots, b_{n-1}, \prod a_\nu^{b_\nu}$ ne peuvent pas être approchés simultanément "très bien" par des nombres algébriques. La démonstration, au contraire de celle de WALLISSER, a besoin de l'analogue en n dimensions de notre méthode. Il serait intéressant de pouvoir supprimer la condition que les a_ν doivent être algébriques au cas où $n \geq 2$ et d'obtenir ainsi un analogue de notre théorème 1.

3° Mentionnons enfin qu'AUGUSTIN [1] a montré un analogue du théorème de Franklin-Schneider en p-adique, mais que sa démonstration est incomplète à la fin. Toutefois l'énoncé de son théorème peut être justifié, et même amélioré, par notre méthode.

3. Corps de séries de Laurent formelles.

Soit F un corps fini avec $q = p^k$ éléments, x une indéterminée, $F[x]$ l'anneau des polynômes en x à coefficients de F, et $F(x)$ le corps de quotients de $F[x]$. $F(x)$ est valué discrètement par

$$|a_1(x)/a_2(x)| = q^{\deg(a_1)-\deg(a_2)},$$

où $a_i(x) \in F[x]$, $a_2(x) \neq 0$, et $\deg(a)$ dénote le degré exact de $a(x) \in F[x]$, $a(x) \neq 0$, $\deg(0) = -\infty$. Soit K le complété de $F(x)$ par rapport à cette valuation, et notons aussi par $|.|$ son prolongement sur le corps K qui est de même valué discrètement de cette façon.

C'est MAHLER [12] qui a démontré que beaucoup de résultats de la théorie classique des approximations diophantiennes ont des analogues dans K, par exemple le théorème de Minkowski sur les formes linéaires que nous allons utiliser plus tard.

Il est aussi possible de faire une théorie des nombres transcendants dans K. Ici un élément $\omega \in K$ est dit transcendant, s'il n'est pas algébrique sur $F(x)$; le rôle des entiers rationnels sera naturellement joué par les éléments de $F[x]$. Les premiers résultats de transcendance dans K étaient démontrés par WADE ([16], [17], [18]) ; ses études avaient été reprises par Mme GEIJSEL ([10], [11]). Il y a essentiellement deux méthodes pour démontrer la transcendance d'un $\omega \in K$: Premièrement, une méthode élémentaire, utilisée par WADE ([16], [17]), et deuxièmement, une méthode analytique du type SIEGEL-SCHNEIDER, qui fut introduite par WADE [18], et appliquée par Mme GEIJSEL ([10], [11]).

On peut se demander, s'il est possible de donner des mesures de transcendance pour des $\omega \in K$ transcendants sur $F(x)$, et c'est à cette question que nous

allons consacrer le reste de ce papier.

Soit $P(Y) = \sum_{i=0}^{n} a_i Y^i$, $a_i \in F[x]$ non tous nuls ; dénotons par $d(P)$ le degré exact de P , et par

$$h(P) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i| = q^{\max \deg(a_i)}$$

la hauteur de P . Posons, pour $\omega \in K$ transcendant sur $F(x)$,

$$w_n(H , \omega) = \min_{P \neq 0, d(P) \leqslant n, h(P) \leqslant H} |P(\omega)| ,$$

et de plus, par analogie avec le cas classique,

$$w_n(\omega) = \limsup_{H \to \infty} \frac{- \log w_n(H , \omega)}{\log H} , \quad w(\omega) = \limsup_{n \to \infty} \frac{w_n(\omega)}{n} .$$

Alors il s'ensuit de l'analogue du théorème de Minkowski déjà mentionné (voir [12]) que l'on a

$$w_n(H , \omega) \leqslant H^{-n} \max(1 , |\omega|^n) ;$$

de là, on a tout de suite $w_n(\omega) \geqslant n$ pour tout nombre naturel n et de plus $w(\omega) \geqslant 1$. Soit $\mu(\omega)$ le plus petit indice tel que $w_\mu(\omega) = \infty$, si un tel indice existe ; autrement on pose $\mu(\omega) = \infty$. Maintenant on dit qu'un élément $\omega \in K$, transcendant sur $F(x)$, est respectivement un

S-nombre, si $1 \leqslant w(\omega) < \infty$ et $\mu(\omega) = \infty$,

T-nombre, si $w(\omega) = \infty$ et $\mu(\omega) = \infty$,

U-nombre, si $w(\omega) = \infty$ et $\mu(\omega) < \infty$.

Comme le corps K , valué par $|.|$, est localement compact, on peut introduire une mesure de Haar sur K . C'est en 1964 que SPRINDŽUK (voir [15], chapter 3) a démontré que presque tout $\omega \in K$ (au sens de cette mesure de Haar) est un S-nombre, même avec $w_n(\omega) = n$ pour tout $n \geqslant 1$. Cet énoncé permet de juger la qualité des mesures de transcendance trouvées pour des $\omega \in K$ spéciaux. Comme dans le cas classique, on dit qu'une fonction réelle $T_\omega(H , n) > 0$ s'appelle <u>mesure de transcendance</u>, si l'on a $w_n(H , \omega) \geqslant T_\omega(H , n)$ au moins pour tous les H , n suffisamment grands.

Pour donner un exemple qui montre comment la méthode élémentaire de démonstration de la transcendance d'un $\omega \in K$ peut fournir des mesures de cette transcendance pas trop mauvaises, nous choisissons un théorème dont la preuve se réduit à un minimum du point de vue technique.

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> $\omega = \sum_{k=1}^{\infty} (x^{q^k} - x)^{-1}$; <u>soient</u> n <u>et</u> H <u>des nombres naturels quelconques. Alors on a</u>

$$|P(\omega)| \geqslant q^{-c_1 \cdot q^{3n}} H^{-c_2 \cdot n q^{2n}}$$

<u>pour tout polynôme</u> P <u>non nul avec</u> $d(P) \leqslant n$, $h(P) \leqslant H$. <u>Ici</u> c_1 , c_2 <u>sont des constantes positives qui ne dépendent que de</u> q <u>et qui peuvent être données expli-</u>

citement.

Notons que la transcendance de cet ω fut démontrée par WADE ([16], theorem 4.1). Des définitions précédentes le corollaire suivant se déduit immédiatement.

COROLLAIRE. - $\omega = \sum_{k=1}^{\infty}(x^{q^k} - x)^{-1}$ est un élément transcendant de K, plus exactement un S-nombre comme presque tous les éléments de K.

Esquisse de la démonstration du théorème 2. - Nous commençons avec le lemme fondamental dont la preuve dépend d'un analogue de ce lemme de Siegel que nous avons utilisé dans l'étape 1° de la démonstration du théorème B. Cet analogue se déduit du théorème de Minkowski-Mahler, mentionné auparavant, et on trouvera une preuve détaillée dans [5].

LEMME. - Soit $P(Y) = a_d Y^d + \dots + a_0$ un polynôme quelconque avec $a_i \in F[x]$, $a_d \neq 0$, $d \geqslant 1$. Alors il existe $A_0, \dots, A_d \in F[x]$, non tous nuls, avec

(9) $\qquad \deg(A_j) \leqslant ad(q^d - d + 1)$, où $a = \max_{0\leqslant i\leqslant d} \deg(a_i)$

tels que

(10) $\qquad \sum_{j=0}^{d} A_j Y^{q^j} = P(Y) \sum_{j=0}^{d} A_j \sum_{k=0}^{q^j-d} b_k a_d^{-k-1} Y^{q^j-d-k}$.

Ici les b_k sont des sommes finies de produits composés exactement de k facteurs $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ non nécessairement différentes.

Ce lemme nous permettra aussitôt d'exploiter largement la caractéristique p. Nous dénotons $\sum_j A_j \sum_k \dots$ par $Q(Y)$ avec la convention usuelle qu'une somme vide $\sum_k \dots$ est égale à zéro.

Prenons maintenant un polynôme quelconque $P(Y) = \sum_{i=0}^{n} a_i Y^i$ non nul, avec $d(P) = d \leqslant n$, $h(P) = q^a \leqslant H$. Si $d = 0$, nous avons même $|P(\omega)| \geqslant 1$. C'est pourquoi nous pouvons supposer $d > 1$, ce qui veut dire que $P(Y)$ est exactement sous la forme supposée dans notre lemme. Dans la formule (10), nous substituons ω à Y, puis nous utilisons $|\omega| = q^{-q} < 1$ et (9) pour majorer $|Q(\omega)|$ d'une "bonne" manière. La seule chose qui reste est la minoration de

(11) $\qquad \sum_{j=0}^{d} A_j \omega^{q^j} = \sum_{j=0}^{d'} A_j \sum_{k=1}^{\infty}(x^{q^k} - x)^{-q^j}$,

où $d' \leqslant d$ est le plus grand indice j tel que $A_j \neq 0$.

Posons $G_J = \prod_{i=1}^{J}(x^{q^i} - x)^{q^{d'}}$ quand $q \geqslant 3$, puis

(12) $\qquad S = G_J \sum_{j=0}^{d'} A_j(\Sigma' + \Sigma'') = S' + S''$.

Ici l'indice J doit être choisi proprement en dépendance de a et d, et de plus la somme $\sum_{k=1}^{\infty}$ dans (11) doit être séparée en deux sommes Σ', Σ'' d'une manière un peu technique telle qu'on peut dire :

(i) $S' \in F[x]$,

(ii) $S' \neq 0$ et

(iii) tout membre s'' de la somme S'' satisfait à la condition $|s''| < 1$ et par conséquent $|S''| < 1$.

Ces faits et la valuation non archimédienne de K nous permettent de tirer la conclusion $|S| = |S'|$ de la formule (12). Cela nous donne une minoration pour S , puis la formule (12) nous donne la minoration désirée pour (11). En éléminant J en faveur de a , d , et en utilisant $q^a = h(P) \leqslant H$, $d' \leqslant d = d(P) \leqslant n$, on a facilement l'énoncé du théorème 2 quand $q \geqslant 3$. Quand $q = 2$, il faut changer le choix de G_J pour pouvoir tirer les conclusions (i), (ii) et (iii), mais alors la démonstration se termine de la même façon.

Signalons enfin que notre papier [5] contiendra un certain nombre de résultats semblables, mais là les démonstrations seront plus détaillées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUGUSTIN (G.). - Über zwei p-adische Approximationsmasse von Werten der Exponentialfunktion, Dissertation Freiburg/Br., 1965.

[2] BAKER (A.). - Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, II., Mathematika, t. 14, 1967, p. 102-107.

[3] BUNDSCHUH (P.). - Zum Franklin-Schneiderschen Satz, J. reine angew. Math., t. 260, 1973, p. 103-118.

[4] BUNDSCHUH (P.). - Zur simultanen Approximation von β_0 , ... , β_{n-1} und $\prod_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu^{\beta_\nu}$ durch algebraische Zahlen, J. reine angew. Math., (à paraître).

[5] BUNDSCHUH (P.). - Transzendenzmasse in Körpern formaler Laurentreihen (en préparation).

[6] DURAND (A.). - Quatre problèmes de Mahler sur la fonction ordre d'un nombre transcendant, Bull. Soc. math. France, t. 102, 1974, p. 365-377.

[7] FEL'DMAN (N. I.). - Approximation of certain transcendental numbers, I., Amer. math. Soc. Transl., Series 2, t. 59, 1966, p. 224-245 ; et [en russe] Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. mat., t. 15, 1951, p. 53-74.

[8] FEL'DMAN (N. I.). - Arithmetic properties of the solutions of a transcendental equation, Amer. math. Soc. Transl., Series 2, t. 66, 1968, p. 145-153 ; et [en russe] Vestnik Moskov. Univ., Ser. 1 : Mat., Mekh., 1964, n° 1, p. 13-20.

[9] FRANKLIN (P.). - A new class of transcendental numbers, Trans. Amer. Math. Soc., t. 42, 1937, p. 155-182.

[10] GELJSEL (J. M.). - Transcendence properties of the Carlitz-Besselfunctions. Math. Centre Report ZW 2/71, Amsterdam, 1971.

[11] GELJSEL (J. M.). - Schneider's method in fields of characteristic $p \neq 0$, Math. Centre Report 17/73, Amsterdam, 1973.

[12] MAHLER (K.). - An analogue to Minkowski's geometry of numbers in a field of series, Ann. of Math., t. 42, 1941, p. 488-522.

[13] SCHNEIDER (T.). - Einführung in die transzendenten Zahlen. - Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1957 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 81).

[14] ŠMELEV (A. A.). - A. O. Gel'fond's method in the theory of transcendental numbers, Math. Notes, t. 10, 1971, p. 672-678 ; et [en russe] Mat. Zametki, t. 10, 1971, p. 415-426.

[15] SPRINDŽUK (V. G.). - Mahler's problem in metric number theory. [Translated from the Russian]. - Providence, American mathematical Society, 1969 (Translations of mathematical Monographs, 25).

[16] WADE (L. I.). - Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$, Duke math. J., t. 8, 1941, p. 701-720.

[17] WADE (L. I.). - Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$, II., Duke math. J., t. 10, 1943, p. 587-594.

[18] WADE (L. I.). - Transcendence properties of the Carlitz ψ-functions, Duke math. J., t. 13, 1946, p. 79-85.

[19] WALLISSER (R.). - Über Produkte transzendenter Zahlen, J. reine angew. Math., t. 258, 1973, p. 62-78.

(Texte reçu le 8 avril 1975)

Peter BUNDSCHUH
Mathematisches Institut der Universität
Weyertal 86-90
D-5000 KÖLN 41
(Allemagne fédérale)