Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

JOHN COATES

Fonctions zêta partielles d'un corps de nombres totalement réel

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 1 (1974-1975), exp. n° 1, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_1_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° 1, 9 p.

14 octobre 1974

FONCTIONS ZÊTA PARTIELLES D'UN CORPS DE NOMBRES TOTALEMENT RÉEL

par John COATES

Les fonctions zêta partielles n'ont pas joué un rôle important dans la théorie de nombres classique, ni algébrique, ni analytique. On a toujours préféré les fonctions zêta et L ordinaires parce que celles-ci ont des produits d'Euler. Pourtant, dans ces dernières années, on a découvert que les zêta partielles sont liées étroitement avec les fonctions zêta et L p-adique, et la théorie des $\mathbb{Z}_p$-extensions d'IWASAWA. Dans cet exposé, je vais discuter quelques aspects de ces liens.

1. Définitions.

Soit K une extension finie du corps rationnel $\mathbb{Q}$. On suppose toujours que K est totalement réel. Soient F un idéal de K ("idéal" signifie toujours "idéal entier"), et I_F le groupe d'idéaux fractionnaires de K, premier à F. Si $\alpha \in K^\times$, on écrit $\alpha \equiv 1 \bmod {}^\times F$ si $v_\mathfrak{p}(\alpha - 1) \geq v_\mathfrak{p}(F)$ pour tout idéal premier de K qui divise F ; ici $v_\mathfrak{p}$ désigne la valuation discrète attachée à $\mathfrak{p}$. Pour $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in I_F$, on écrit $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ s'il existe $\alpha \in K^\times$ tel que $\alpha \equiv 1 \bmod {}^\times F$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}(\alpha)$, et α est totalement positif. On écrit C_F pour le groupe de classes d'idéaux défini par cette relation d'équivalence. On dit que C_F est le groupe de F-classes d'idéaux.

Bien entendu, c'est la théorie de corps de classes qui donne de l'importance au groupe de F-classes d'idéaux. En effet, pour toute extension finie abélienne M de K, l'homomorphisme d'Artin définit une surjection de C_F sur $G(M/K)$, pour F convenable.

Soit $r \in C_F$. On définit la fonction zêta partielle de r par

$$\mathcal{S}_F(r, s) = \sum_{\mathfrak{a} \in r, \mathfrak{a} \text{ intègre}} (N\mathfrak{a})^{-s} \qquad (\Re(s) > 1).$$

Le prolongement des fonctions L abéliennes de K implique qu'on peut prolonger analytiquement $\mathcal{S}_F(r, s)$ dans tout le plan complexe, sauf pour un pôle simple à $s = 1$.

Après des résultats antérieurs de KLINGEN, SIEGEL [9] a démontré le fait fondamental suivant.

THÉORÈME 1. - *Pour chaque entier* $n \geq 1$, $\mathcal{S}_F(r, 1-n) \in \mathbb{Q}$.

La preuve de Siegel est basée sur le fait remarquable que, sauf dans le cas $n = 1$ et $F = 1$, $\mathcal{S}_F(r, 1-n)$ est le terme constant de la " q-series" expansion d'une certaine forme modulaire. On connaît une formule explicite finie pour $\mathcal{S}_F(r, 1-n)$

seulement dans deux cas :

(a) $K = \underset{\sim}{Q}$ (due à HURWITZ [5]), et

(b) K quadratique réel (due à SIEGEL [10]).

2. Elements de Stickelberger.

Soient M une extension abélienne finie de K, $G = G(M/K)$, et F le conducteur de M sur K. Pour tout idéal b de K, premier à F, nous écrivons $(b , M/K)$ pour le symbole d'Artin de b dans l'extension M/K. Aussi, posons $s_F(b , s)$ pour la fonction zêta partielle de la classe de b dans C_F. Pour chaque entier $n \geq 1$, on définit l'élément de Stickelberger n-ième de M/K, $\alpha_n(M/K)$, par

$$\alpha_n(M/K) = \Sigma_b \, s_F(b , 1 - n)(b , M/K)^{-1} ,$$

où b parcourt un ensemble de représentants de C_F. Cette définition (au moins dans le cas $n = 1$) a été proposée par BRUMER (non publié). Evidemment, $\alpha_n(M/K)$ appartient à l'anneau de groupe rationnel $\underset{\sim}{Q}[G]$. Signalons une autre expression pour $\alpha_n(M/K)$, qui est utile. Soit $\hat{G}$ le groupe d'homomorphismes $\chi : G \longrightarrow \underset{\sim}{C}^{\times}$. Pour chaque $\chi \in \hat{G}$, posons

$$L_S(\chi , s) = \Sigma_b \, \chi(b) \, s_F(b , s) ,$$

où $\chi(b)$ est la valeur de χ à $(b , M/K)$. En effet, $L_S(\chi , s)$ est la fonction L de χ avec les facteurs correspondant aux diviseurs premiers de F supprimés dans son produit d'Euler. Alors on voit très facilement que

$$\alpha_n(M/K) = \Sigma_{\chi \in \hat{G}} \, L_S(\chi , 1 - n) \, e_{\chi^{-1}} ,$$

où $e_{\chi^{-1}}$ est l'idempotent de χ^{-1} dans $\underset{\sim}{C}[G]$.

Pour chercher un multiple entier de $\alpha_n(M/K)$, c'est-à-dire dans $\underset{\sim}{Z}_p[G]$ pour un nombre premier p donné, il est traditionnel de prendre le suivant. Soit c n'importe quel idéal (entier) de K avec $(c , F) = 1$, et considérons

$$((Nc)^n - (c , M/K)) \, \alpha_n(M/K) .$$

Evidemment, on a

$$(1) \qquad ((Nc)^n - (c , M/K)) \, \alpha_n(M/K) = \Sigma_b \, \delta_n(b , c ; F)(b , M/K)^{-1} ,$$

où

$$(2) \qquad \delta_n(b , c ; F) = (Nc)^n \, s_F(b , 1 - n) - s_F(bc , 1 - n) .$$

3. La congruence fondamentale.

Soient L un corps, et r un entier ≥ 1. Suivant LICHTENBAUM, on définit $w_r(L)$ comme le plus grand entier m tel que $r.G(L(\mu_m)/L) = 0$. Ici μ_m est le groupe de racines m-ièmes d'unité dans une clôture algébrique de L.

Pour chaque idéal (entier) F de K, soit R_F le corps de classes du rayon modulo F de K. C'est l'extension abélienne maximale de K dont le (la partie finie du) conducteur divise F.

Fixons un nombre premier p. Voici la congruence fondamentale.

THÉORÈME 2. - *Soit F un idéal de K qui est divisible par tous les idéaux premiers de K au-dessus de p. Alors, pour tous les idéaux (entiers) b, c avec $(b, F) = (c, F) = 1$, et tout entier $n \geq 1$, on a*

1° $\delta_1(b, c; F) \in \mathbb{Z}_p$;

2° $\delta_n(b, c; F) \equiv (Nbc)^{n-1}\, \delta_1(b, c; F) \mod w_{n-1}(R_F)\, \mathbb{Z}_p$.

Le cas général de ce théorème vient être démontré par DELIGNE et RIBET (cf. [4]), en utilisant une théorie de formes modulaires p-adiques pour le groupe modulaire de Blumenthal et Hilbert de K. Pour $K = \mathbb{Q}$, ou K = quadratique réel, une démonstration élémentaire, basée sur les formules explicites pour $s_F(b, 1-n)$, a été donnée dans [3] et [11]. Ce théorème implique l'existence des fonctions L p-adiques pour toute extension abélienne finie de K, avec les meilleures propriétés d'holomorphie (conjecturées par Serre et Lichtenbaum). Il faut dire, aussi, que l'idée de construire les fonctions L p-adiques au moyen des éléments de Stickelberger est due à IWASAWA [6]. [Voir la Note à la fin du texte.]

Il y a peut-être intérêt à signaler deux formes équivalentes du théorème 2.

THÉORÈME 2 (a). - *Soit F un idéal de K qui est divisible par tous idéaux de K au-dessus de p. Alors, pour tout idéal (entier) c de K avec $(c, F) = 1$, et tout entier $n \geq 1$, on a*

1° $s_F(c, 0) \equiv s_F(1, 0)\, Nc \mod \mathbb{Z}_p$;

2° $s_F(c, 1-n) \equiv \lambda_{n,F}(Nc)^n + (Nc)^{n-1}\, s_F(c, 0) \mod w_{n-1}(R_F)\, \mathbb{Z}_p$,

où $\lambda_{n,F} = s_F(1, 1-n) - s_F(1, 0)$.

Ici, si $u, v \in \mathbb{Q}_p$ et $m \in \mathbb{Z}$, nous écrivons $u \equiv v \mod m\mathbb{Z}_p$ pour indiquer que $u - v \in m\mathbb{Z}_p$. De même, bien entendu, l'idéal 1 est l'anneau des entiers de K. L'équivalence des théorèmes 2 et 2 (a) est immédiate. En effet, pour déduire le théorème 2 (a), on prend $b = 1$ dans le théorème 2. Réciproquement, on remarque que les premiers termes sur la droite dans les congruences du théorème 2 (a) se détruisent quand on formes les différences $\delta_n(b, c; F)$, d'où le théorème 2.

THÉORÈME 2 (b). - *Mêmes hypothèses et notations que le théorème 2. Alors, on a*

1° $\delta_1(b, c; F) \in \mathbb{Z}_p$;

2° *Etant donné n'importe quel entier $N > 0$, on peut trouver un entier $M = M(N)$ tel que*

$$v_p(\delta_n(b, c; F) - (Nbc)^{n-1}\, \delta_1(b, c; F)) \geq N,$$

pourvu que $v_p(F) \geq M$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de K au-dessus de p .

Il est clair que le théorème 2 implique le théorème 2 (b), parce que la condition $v_p(F) \geq M$ pour tout $\mathfrak{p}$ de K au-dessus de p implique $\mu_{p^N} \subset R_F$ quand $M=M(N)$ est suffisamment grand. La réciproque n'est pas évidente, et est due à SINNOTT. C'est essentiellement le raisonnement de la dernière partie du §3 de [3] (voir aussi [11]).

Remarque. - On peut déduire du théorème 2 toutes les conjectures d'intégralité pour les valeurs des fonctions L abéliennes de K faites dans [1]. Pourtant, il semble que la conjecture de divisibilité (Conjecture 3) faite dans [1] n'est pas une conséquence du théorème 2, sauf dans le cas $K = \mathbb{Q}$. Il faut dire que j'avais prétendu, sans preuve, dans l'introduction de [3], avoir démontré cette conjecture de divisibilité pour les extensions abéliennes et totalement réelles d'un corps quadratique réel. Cette affirmation n'est pas justifiée.

4. Les relations de Stickelberger conjecturales.

Soit M une extension abélienne finie de K , dont le conducteur F est divisible par tous les idéaux premiers de K au-dessus de p . On fait cette dernière hypothèse pour simplifier seulement (pour éviter les problèmes ennuyeux d'intégralité quand le conducteur n'est pas divisible par tous les idéaux $\mathfrak{p}$ de K au-dessus de p). Notons aussi que cette hypothèse est vraie dans le cas important où M contient μ_{p^n} pour n suffisamment grand. On définit

$$\mathfrak{J}_n(M/K) = \text{Idéal de } \mathbb{Z}_p[G]$$

qui est engendré par tous les éléments $((Nc)^n - (c\ ,\ M/K))\ \alpha_n(M/K)$ avec $(c,F)=1$. Ceci a un sens, grâce au théorème 2 (qui implique, en particulier, que

$$\delta_n(\mathfrak{d}\ ,\ c\ ;\ F) \in \mathbb{Z}_p\ ).$$

On dit que $\mathfrak{J}_n(M/K)$ est l'idéal de Stickelberger n-ième pour M/K (relatif au nombre premier p).

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de M , et soit $K_{2n}\mathcal{O}$ $(n = 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots)$ le K-groupe de l'anneau $\mathcal{O}$ au sens de QUILLEN [8]. En particulier, $K_0\mathcal{O}$ est le groupe de classes d'idéaux de M . Bien entendu, $\mathbb{Z}_p[G]$ opère sur le composant p-primaire $K_{2n}\mathcal{O}(p)$ de $K_{2n}\mathcal{O}$ dans une façon naturelle.

CONJECTURE 3. - Pour chaque entier $n \geq 1$, on a

$$\mathfrak{J}_n(M/K).K_{2n}\mathcal{O}(p) = \{0\}\ .$$

Ce problème semble extrêmement difficile. On sait démontrer cette conjecture seulement pour $K = \mathbb{Q}$ et $n = 0$ (théorème de Stickelberger, cf. [7]) et $n = 1$ (démontré dans [2]).

5. Dénominateurs des $\mathfrak{S}_F(b , 1 - n)$.

Les conjectures de Lichtenbaum [1], qui interprètent les valeurs d'une fonction L d'Artin aux entiers négatifs comme une caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau pour la cohomologie étale, donnent, en particulier, de très bonnes majorations pour les dénominateurs de ces valeurs. Il est invraisemblable que de telles conjectures soient vraies pour les $\mathfrak{S}_F(b , 1 - n)$. Néanmoins, on a le résultat suivant. [Voir la Note à la fin du texte.]

THÉORÈME 4. - Soit F n'importe quel idéal entier de K . Alors,

(1) pour chaque entier $n > 1$, $w_n(R_F)\, \mathfrak{S}_F(b , 1 - n)$ est un entier ; et

(2) si $K = \mathbb{Q}$, ou K est quadratique réel, $w_1(R_F)\, \mathfrak{S}_F(b , 0)$ est un entier.

L'affirmation (1) est due à SINNOTT [11]. Il avait démontré qu'elle est une conséquence du théorème 2, en utilisant les propriétés formelles des éléments de Stickelberger. Le même raisonnement ne marche pas pour $n = 1$. Pourtant, C. QUEEN m'avait fait remarquer qu'il est bien probable que les méthodes de DELIGNE [4] démontreront (2) pour n'importe quel corps totalement réel K (sauf peut-être dans le cas $F = 1$). L'affirmation (2) est due à BRUMER (non publiée), et, plus tard, j'ai retrouvé indépendamment la même démonstration essentiellement. Je veux finir en esquissant cette démonstration de (2) dans le cas où K est quadratique réel (c'est évident pour $K = \mathbb{Q}$, vu la formule explicite pour $\mathfrak{S}_F(b , 0)$). Donc nous supposons que K est quadratique réel. La preuve est basée sur deux faits :

(a) une propriété modulaire de la fonction $\eta^2(z)$ de Dedekind, et

(b) une formule explicite de Siegel-Hecke pour $\mathfrak{S}_F(b , 0)$.

(a) Propriété modulaire de $\eta^2(z)$. - Rappelons que, si z appartient au demi-plan de Poincaré H , nous avons

$$\eta^2(z) = q^{1/12} \prod_{m=1}^{\infty}(1 - q^m)^2 ,$$

où $q = \exp 2\pi i z$ et $q^{1/12} = \exp \pi i z/6$. Soit $\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$. Alors on sait que

$$\eta^2(\mathfrak{M}z) = \varepsilon(\mathfrak{M})(cz + d)\, \eta^2(z) ,$$

où $\varepsilon(\mathfrak{M})$ est une racine 12e de l'unité. De cette façon, on obtient un homomorphisme de groupes $\varepsilon : SL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mu_{12}$. On appelle souvent $\varepsilon(\mathfrak{M})$ une "somme de Dedekind". Le lemme suivant ne semble pas être explicitement dans la littérature, mais il est assez bien connu (BRUMER, GROSSWALD et OGG m'avaient donné des démonstrations). Soit $M_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble de (2×2)-matrices à coefficients entiers, et soit Λ un élément de $M_2(\mathbb{Z})$.

LEMME 5. - Supposons que N = déterminant de Λ est positif et premier à 6 . Soit $\mathfrak{M} \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\pi = \Lambda^{-1} \mathfrak{M} \Lambda$ soit aussi dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Alors on a

$$\varepsilon(\mathfrak{M}) = \varepsilon(\pi)^N , \quad \varepsilon(\pi) = \varepsilon(\mathfrak{M})^N .$$

Voici une démonstration de ce lemme basé sur la formule explicite pour $\varepsilon(\mathcal{M})$ (cf. [12], p. 126). Notons d'abord que les deux affirmations du lemme sont équivalentes parce que $N^2 \equiv 1 \mod 12$ pour $(N , 6) = 1$. Nous pouvons écrire

$$\Lambda = AWB ,$$

où $A , B \in SL_2(\underset{\sim}{Z})$, et W diagonal.

Puisque ε est un homomorphisme de groupes, on conclut qu'il suffit de démontrer le lemme dans le cas où Λ est diagonal. Supposons que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} , \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Alors, par un calcul direct,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b\alpha^2/N \\ c\gamma^2/N & d \end{pmatrix} .$$

D'autre part, on peut évidemment supposer que $c > 0$, et, dans ce cas, la formule explicite pour $\varepsilon(\mathcal{M})$ est

$$(3) \qquad \exp\left(\frac{\pi i}{6} \{bd(1 - c^2) + c(a + d)\} - \frac{\pi i c}{2}\right) \ \underline{\text{si}} \ c \ \underline{\text{est impair}},$$

et

$$(4) \qquad \exp\left(\frac{\pi i}{6} \{ac(1 - d^2) + d(b - c)\} - \frac{\pi i(d - 1)}{2}\right) \ \underline{\text{si}} \ c \ \underline{\text{est pair}}.$$

Remarquons que c et $c\gamma^2/N$ ont même parité parce que γ divise N et $(N , 6) = 1$. Supposons c impair. Utilisant la formule (3), pour $\mathcal{M}$, on obtient

$$\varepsilon(\mathcal{M})^N = \exp\left(\frac{\pi i}{6} \{\alpha^2 \, bd\left(1 - \frac{c^2 \gamma^2}{\alpha^2}\right) + c\gamma^2(a + d)\} - \frac{\pi i c\gamma^2}{2}\right) ,$$

d'où le lemme parce que $\alpha^2 \equiv \gamma^2 \equiv 1 \mod 12$ puisque $(\alpha , 6) = (\gamma , 6) = 1$, étant diviseurs de N. Le raisonnement est analogue pour c pair, grâce au fait que d est alors impair.

(b) <u>La formule de Hecke-Siegel</u> (voir [10]). - Soient $t \in \underset{\sim}{C}$ et $z \in H$. On définit la fonction théta $\theta(t , z)$ par le produit infini

$$\frac{\theta(t , z)}{\eta(z)} = \exp(\pi i z/6) \; 2 \sin(\pi t) \prod_{m=1}^{\infty}(1 - 2q^m \cos 2\pi t + q^{2m}) ,$$

où $q = \exp 2\pi i z$, et $\eta(z)$ est la fonction η de Dedekind. Soit $U = (u , v)$ un vecteur dans $\underset{\sim}{R}^2$.

<u>Définition</u>. - $\psi(U ; z) = \exp(\pi i uv) \exp(\pi i u^2 z) \, \theta(v + uz , z)/\eta(z)$. Grâce aux équations fonctionnelles bien connues de la fonction théta, on déduit deux équations fonctionnelles pour $\psi(U ; z)$:

(I) Si $\mathcal{M} \in SL_2(\underset{\sim}{Z})$,

$$\psi(U\mathcal{M}^{-1} ; \mathcal{M}z) = \varepsilon(\mathcal{M}) \, \psi(U ; z) ,$$

où $\varepsilon(\mathcal{M})$ est la racine d'unité 12e dans l'équation fonctionnelle de $\eta^2(z)$.

(II) $\psi((u + 1 , v) ; z) = -\exp(-\pi i v) \, \psi((u , v) ; z)$,

$\psi((u , v + 1) ; z) = -\exp \pi i u \, \psi((u , v) ; z)$.

Soit maintenant $\mathfrak{b}$ un idéal (entier) de K avec $(\mathfrak{b}, F) = 1$. Posons $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/\theta F$, où θ est la différente de K sur $\mathbb{Q}$. Choisissons une $\mathbb{Z}$-base α, β de $\mathfrak{a}$ telle que $\omega = -\beta/\alpha$ soit plus grand que son conjugué ω'. On note $\mathrm{Tr}(x)$ la trace de $x \in K$, et on écrit $U = (\mathrm{Tr}(\alpha), \mathrm{Tr}(\beta))$. Soit E_F le groupe des unités de K qui sont totalement positives et $\equiv 1 \mod F$; c'est un groupe abélien libre de rang un. Soit η le générateur de E_F qui est > 1. Définissons $\mathfrak{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ par l'équation

$$\eta^{-1}(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)\mathfrak{M}.$$

Soient $\mathcal{C}$ le demi-cercle dans H passant par ω' et ω, et z_0 un point arbitraire de $\mathcal{C}$ dans H. Enfin, on écrit $v(\gamma) = N\gamma/|N\gamma|$ pour tout $\gamma \in K$. La formule de Hecke-Siegel est la suivante (cf. [10], §5).

THÉORÈME 6.

1° <u>Si</u> $F \neq 1$, <u>on a</u>

$$S_F(\mathfrak{b}, 0) = \frac{-v(\alpha)}{2\pi i} \int_{\mathfrak{M}^{-1} z_0}^{z_0} \frac{d}{dz} \log \psi(U ; z)\, dz ;$$

2° <u>Si</u> $F = 1$, <u>on a</u>

$$S_F(\mathfrak{b}, 0) = \frac{-v(\alpha)}{2\pi i} \int_{\mathfrak{M}^{-1} z_0}^{z_0} \left\{\frac{1}{z - \bar{z}} + \frac{d}{dz} \log \eta^2(z)\right\} dz$$

(<u>on prend le contour d'intégration de</u> $\mathfrak{M}^{-1} z_0$ <u>à</u> z_0 <u>le long de</u> $\mathcal{C}$).

Le lemme qui suit est valable pour n'importe quel corps de nombres totalement réel K, et n'importe quel entier $n \geq 1$.

LEMME 7. - <u>Soit</u> r <u>un entier positif tel que</u> $w_n(R_F)$ <u>divise</u> r. <u>Alors</u> $w_n(R_F)$ <u>est le plus grand diviseur commun de l'ensemble des entiers</u> $\{(N\mathfrak{a})^n - 1\}$, <u>où</u> $\mathfrak{a}$ <u>parcourt tous les idéaux entiers de</u> K <u>avec</u> $\mathfrak{a} \sim 1 \mod F$ <u>et</u> $(\mathfrak{a}, Fr) = 1$.

La démonstration (cf. [3], [11]) est un exercice assez facile avec les propriétés formelles du symbole d'Artin. Supposons encore une fois que K est quadratique réel. On voit sans difficulté que $w_1(R_F)$ divise $12f$, où $(f) = F \cap \mathbb{Z}$. Donc l'affirmation (2) du théorème 4 est une conséquence du lemme 7 et du résultat suivant.

THÉORÈME 8. - <u>Supposons que</u> K <u>est quadratique réel</u>. <u>Alors</u> $\delta_1(\mathfrak{b}, c ; F) \in \mathbb{Z}$ <u>pourvu que</u> $(c, 6F) = 1$.

Commençons la démonstration du théorème 8. Posons

$$U^* = U\mathfrak{M}, \quad U = (u, v), \quad U^* - U = (h, k).$$

Grâce au fait que $\eta^{-1}\alpha - \alpha$ et $\eta^{-1}\beta - \beta$ appartiennent à θ^{-1}, on conclut que

$$h = \mathrm{Tr}(\eta^{-1}\alpha - \alpha), \quad k = \mathrm{Tr}(\eta^{-1}\beta - \beta)$$

appartiennent à $\underset{\sim}{Z}$. Supposons d'abord que $F \neq 1$. Pour a , $b \in \underset{\sim}{Q}$, on écrit $a \equiv b \mod \underset{\sim}{Z}$ si $a - b \in \underset{\sim}{Z}$. La 1re formule du théorème 6 implique que

$$s_F(b , 0) \equiv - \frac{v(\alpha)}{2\pi i} \log(\psi(U ; z_0) / \psi(U ; \pi^{-1} z_0)) \mod \underset{\sim}{Z}$$

(on obtient seulement une congruence à cause des valeurs multiples du logarithme). Evidemment,

$$(\psi(U ; z_0)/\psi(U ; \pi^{-1} z_0)) = \Pi_1 \Pi_2 ,$$

où

$$\Pi_1 = (\psi(U ; z_0)/\psi(U\pi ; \pi^{-1} z_0)) , \quad \Pi_2 = (\psi(U^* ; \pi^{-1} z_0)/\psi(U ; \pi^{-1} z_0)) .$$

L'équation fonctionnelle (I) donne $\Pi_1 = \varepsilon(\pi)$, et (II) donne

$$\Pi_2 = (- 1)^{\nu} \exp \pi i(uk - vh) , \text{ où } \nu = h + k + hk .$$

D'autre part, un calcul assez facile montre que

$$uk - vh = v(\alpha)\, Nb = \rho_F , \text{ où } \rho_F = (\eta - \eta^{-1})/(N\mathfrak{F}\sqrt{\Delta}) ;$$

ici Δ désigne le discriminant de K . Donc

$$(5) \qquad s_F(b , 0) \equiv - \frac{Nb}{2}\rho_F - \frac{v(\alpha)}{2\pi i} \log(\varepsilon(\pi)(- 1)^{\nu}) \mod \underset{\sim}{Z} .$$

Soit maintenant c un idéal entier de K avec $(c , 6F) = 1$; en particulier, $(Nc , 6) = 1$. Notons $b_1 = bc$, et écrivons α_1 , β_1 , U_1 , π_1 , etc. pour les paramètres de b_1 correspondant à ceux de b . On voit sans difficulté qu'on peut choisir les bases α , β et α_1 , β_1 telles que $v(\alpha) = v(\alpha_1)$, et que la matrice Λ donnée par $(\alpha_1 , \beta_1) = (\alpha , \beta)\Lambda$ soit de la forme $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. De plus, on vérifie que, avec ce choix des bases, on a

$$\det \Lambda = Nc > 0 .$$

Puisque $\pi_1 = \Lambda^{-1} \pi\Lambda$, on conclut de (5) et du lemme 5 que

$$\delta_1(b , c ; F) \equiv - \frac{v(\alpha)}{2\pi i} \log((- 1)^{\nu Nc - \nu_1}) \mod \underset{\sim}{Z} .$$

Enfin

$$(h_1 , k_1) = (h , k)\Lambda ,$$

et, grâce au fait que a et d sont impairs, un calcul direct montre que

$$\nu Nc \equiv \nu \equiv \nu_1 \mod 2 .$$

Donc la démonstration du théorème 8 est complète dans le cas $F \neq 1$. Nous laissons au soin du lecteur, la démonstration dans le cas $F = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COATES (J.) and LICHTENBAUM (S.). - On ℓ-adic zeta functions, Annals of Math., t. 98, 1973, p. 498-550.

[2] COATES (J.) and SINNOTT (W.). - An analogue of Stickelberger's theorem for the higher K-groups, Invent. Math., Berlin, t. 24, 1974, p. 149-161.

[3] COATES (J.) and SINNOTT (W.). - On p-adic L-functions over real quadratic fields, Invent. Math., Berlin, t. 25, 1974, p. 253-279.

[4] DELIGNE (P.). - Lettre à Serre, décembre 1973.

[5] HURWITZ (A.). - Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Funktionen $F(s) = \Sigma (D/n)\ 1/n^s$, ..., "Mathematische Werke", I, p. 72-88. - Basel, E. Birkhäuser, 1932.

[6] IWASAWA (K.). - On p-adic L-functions, Annals of Math., t. 89, 1969, p. 198-205.

[7] LEOPOLDT (H.). - Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern, J. für reine und angew. Math., t. 209, 1962, p. 54-71.

[8] QUILLEN (D.). - Higher algebraic K-theory, I , "Algebraic K-theory, I", p. 85-147. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 341).

[9] SIEGEL (C.). - Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Gött. Nach., t. 3, 1970, p. 15-56.

[10] SIEGEL (C.). - Bernoullische Polynome und quadratischer Zahlkörper, Gött. Nach., t. 2, 1968, p. 7-38.

[11] SINNOTT (W. M.). - On P-adic L-functions, Ph. D. Thesis, Stanford Univ., 1974.

[12] WEBER (H.). - Lehrbuch der Algebra, III. - Braunschweig, F. Vieweg und Sohn, 1908.

Note ajoutée à la correction des épreuves. - Il semble que les preuves de DELIGNE-RIBET ne sont pas tout à fait complètes à l'heure où a été rédigé ce manuscrit, aussi le lecteur doit-il regarder les théorèmes 2, 2 (a), 2 (b) , et l'affirmation (1) du théorème 4, comme encore un peu provisoires. Bien entendu, ces résultats sont entièrement démontrés dans les cas $K = \underset{\sim}{Q}$ ou K quadratique réel.

(Texte reçu le 15 janvier 1975)

John COATES
13 Tunwells Lane
Great Shelford
CAMBRIDGE
(Grande-Bretagne)