

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PHILIPPE TOFFIN

## Conditions suffisantes d'équirépartition modulo 1. Problème de Waring-Goldbach pour $f(x) = x^c$ , $c$ non entier

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 16, n° 1 (1974-1975), exp. n° 15, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1974-1975\\_\\_16\\_1\\_A10\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_1_A10_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CONDITIONS SUFFISANTES D'ÉQUIRÉPARTITION modulo 1 .  
 PROBLÈME DE WARING-GOLDBACH POUR  $f(x) = x^c$  ,  $c$  NON ENTIER

par Philippe TOFFIN

Dans tout ce qui suit, pour  $x$  réel, on pose  $e(x) = \exp 2i\pi x$  et  $[x]$  la valeur entière de  $x$  par défaut.

1. Conditions suffisantes d'équirépartition modulo 1 .

Nous donnons une amélioration du lemme fondamental démontré dans l'appendice du livre de HUA [4].

LEMME 0. - Il existe  $A, B, C$  réels strictement positifs tels que, pour tout polynôme  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  de degré  $n \geq 2$ , pour tous entiers  $N$  et  $P$  tels que  $0 < 2n|a_n| P \leq 1$ , et pour tout réel  $\lambda$  situé dans  $]0, 1[$ , on ait :

$$\left| \sum_{x=N+1}^{N+P} e(f(x)) \right| \leq A \exp(Bn(\log^2 n + \log^2 \lambda)) \log P P^{1-(\lambda/(18n^2 \log n/\lambda))} + C/(|a_n|^{1/(n-\lambda)}) .$$

LEMME 1. - Soient  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $k \rightarrow Q_k$ , et  $k \rightarrow P_k$  deux suites telles que :

$Q_k$  est non décroissante ;

$P_k$  et  $Q_k$  ont pour limite  $+\infty$  .

Pour tout  $k$  assez grand,  $P_k < Q_{k-1}$  . Soit  $S(N) = \sum_{x=1}^N e(f(x))$  .

On suppose que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists k_0(\varepsilon)$ ,  $\forall k \geq k_0(\varepsilon)$ ,  $\forall N \in [Q_{k-1}, Q_k]$ ,

$$|S(N - [P_k]) - S(N)| \leq \varepsilon [P_k] .$$

Alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S(N)/N = 0 .$$

THÉORÈME 1. - Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  . On suppose qu'il existe 4 suites :

$k \rightarrow t_k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$  ,

$k \rightarrow \lambda_k \in ]0, 1[$  ,

$k \rightarrow P_k$  ,

$k \rightarrow Q_k$  ,

telles que :

$Q_k$  est non décroissante ;

$Q_k$ ,  $P_k$  et  $Q_{k-1} - P_k$  ont pour limite  $+\infty$ .

On suppose qu'il existe  $x_0$  tel qu'en tout  $x \geq x_0$ ,  $f$  admette une dérivée continue à l'ordre  $1 + t_k$ , pour tout  $k$ . Enfin on suppose :

$$(\alpha) \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{Q_{k-1} - P_k \leq x \leq Q_k} P_k^{1+t_k} \left| \frac{f^{(1+t_k)}(x)}{(1+t_k)!} \right| = 0$$

$$(\beta) \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{Q_{k-1} \leq x \leq Q_k} 2t_k P_k \left| \frac{f^{(t_k)}(x)}{t_k!} \right| = 0$$

$$(\gamma) \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf_{Q_{k-1} \leq x \leq Q_k} P_k \left| \frac{f^{(t_k)}(x)}{t_k!} \right|^{1/(t_k - \lambda_k)} = +\infty$$

$$(\delta) \lim_{k \rightarrow +\infty} \exp(Bt_k(\log^2 t_k + \log^2 \lambda_k)) \log P_k P_k^{-(\lambda_k/(18t_k^2 \log(t_k/\lambda_k)))} = c$$

(B étant la constante du lemme 0).

Alors la suite  $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est équirépartie modulo 1.

Du théorème 1, on tire le théorème suivant.

**THÉORÈME 2.** - Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe un entier  $t \geq 2$ , un réel  $\lambda$  dans  $]0, 1[$ , et  $x_0$  réel tels que  $f$  admette, en tout  $x \geq x_0$ , une dérivée continue à l'ordre  $1 + t$ . On suppose qu'il existe  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

(1)  $\varphi$  est non décroissante et non majorée,

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \varphi(x) = +\infty,$$

$$(3) \exists M, \forall x \geq x_0, \frac{\varphi(x)}{\varphi(x - \varphi(x))} \leq M,$$

$$(A) \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi^{1+t}(x) f^{(1+t)}(x) = 0,$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) f^{(t)}(x) = 0,$$

$$(C) \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) |f^{(t)}(x)|^{1/(t-\lambda)} = +\infty.$$

Alors la suite  $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est équirépartie modulo 1.

Exemples.

- En prenant  $\varphi(x) = x^u$ ,  $0 < u < 1$ , on retrouve l'équirépartition de  $(P^c(n))_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $P \in \mathbb{R}[X]$  est de degré  $k$ ,  $c$  un réel  $> 0$  tel que  $kc$  non entier.

- Soient  $k$  un entier  $\geq 2$ ,  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  dérivable telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty;$$

il existe  $\beta$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $h(x) \ll x^\beta$  et  $h'(x)/h(x) \ll 1/(x^{(1/k)+\varepsilon})$ . Soit  $g$  holomorphe au voisinage de l'infini, réelle sur la partie de  $\mathbb{R}$  où elle est dé-

finie, et vérifiant  $g(\infty) \neq 0$ . Soit  $f$  telle que

$$f^{(k)}(x) = \frac{g(x)}{x \log^\alpha h(x)} \quad \text{où } \alpha > 0.$$

Alors  $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est équirépartie modulo 1.

Nous donnons maintenant une généralisation du théorème de Fejer (pour les fonctions deux fois continûment différentiables).

LEMME 3. - Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ayant une dérivée seconde continue. On suppose qu'il existe  $\varphi$  vérifiant (1), (2), (3) du théorème 2, et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi^2(x) f''(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) |f'(x)| = +\infty.$$

Alors la suite  $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est équirépartie modulo 1.

G. RAUZY [6] a étudié l'équirépartition des suites  $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $f$  est entière ( $f(x) = \sum_{n \geq 0} v_n x^n$ ) et que  $v_n$  décroît rapidement vers 0. Ces fonctions vérifient les hypothèses du théorème 1. Ce même théorème permet de montrer que la suite  $f(n) = \sum_{j \geq 0} e^{-j^6} n^j + \log n$  est équirépartie ( $f$  est seulement analytique).

Equirépartition de suites  $(f(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant la suite croissante des nombres premiers.

THÉORÈME 3. - Soient  $f$  et  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

(1)  $\varphi$  est non décroissante,

(2)  $\varphi(x) \ll \varphi(\frac{x}{2})$ ,

(3)  $x^{(1/2)+\varepsilon} \ll \varphi(x) \ll x^{1-\varepsilon}$ ,

(4)  $\varphi(x) |f^{(k)}(x)|^{1/(k-\varepsilon)} \gg x^\varepsilon \quad (k \geq 2)$ ,

(5)  $\varphi^{k+1}(x) f^{(k+1)}(x) \ll x^{-\varepsilon}$ ,

(6)  $f^{(k)}(x) \ll x^{-(5k/8)-\varepsilon}$ ,

(7)  $|f^{(k)}(x)| \ll |kf^{(k)}(x) + xf^{(k+1)}(x)| \ll |f^{(k)}(x)|$ .

Alors la suite  $(f(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est équirépartie modulo 1.

Les deux lemmes suivants permettent, en utilisant la méthode employée par G. RHIN dans [7], d'obtenir le théorème 3.

LEMME 4. - Soit  $S = \sum_{y \in \mathcal{S}} \psi(y) \sum_{x \in \mathcal{K}} e(f(t^2 xy))$ , où  $t$  et  $N$  sont entiers,  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{K}$  deux parties de  $\mathbb{N}$  dépendant de  $t$  et de  $N$ ,  $t^2 xy \leq N$ ,

$$t^{-1} N^{0,24} \ll y \ll t^{-1} N^{0,5},$$

et où  $\psi$  vérifie, pour  $Y^{0,6} \leq Y' \leq Y \leq N$ ,

$$\sum_{Y-Y' < y \leq Y} |\psi(y)| \ll Y' \log N \quad \text{et} \quad \sum_{Y-Y' < y \leq Y} |\psi(y)|^2 \ll Y' \log^3 N .$$

Alors il existe  $\rho > 0$  tel que  $S \ll t^{-1,1} N^{1-\rho}$  .

LEMME 5. - Soit  $S = \sum_{d \in \mathcal{Q}} \sum_{M' < x \leq M, dx \leq N} e(f(dx))$  , où  $\mathcal{Q}$  est une partie de  $\mathbb{N}$  dépendant de  $N$  , et  $N^{0,75} \leq M/4 \leq M' \leq M/2 < M \leq N$  .

Alors il existe  $\rho > 0$  tel que  $S \ll N^{1-\rho}$  .

Application. - Soit  $f(x) = (P(x))^c$  , où  $P \in \mathbb{R}[X]$  ,  $d^0 P = k$  ,  $c$  réel  $> 0$  .

- Si  $kc$  n'est pas entier,  $(P^c(p))_{\substack{n \\ n \in \mathbb{N}}}$  est équirépartie modulo 1 .

- Si  $kc$  est entier, il existe un polynôme  $Q$  de degré  $kc$  , et  $\psi$  holomorphe 0 , nulle en 0 telle que  $f(x) = Q(x) + \psi(\frac{1}{x})$  . On est ramené à l'équirépartition de  $Q(p_n)$  (cf. [7]).

2. Problème de Waring-Goldbach pour  $f(x) = x^c$  ,  $c$  réel non entier  $> 12$  .

On veut montrer qu'il existe  $\ell = \ell(c)$  tel que tout entier  $N$  assez grand s'écrive

$$(1) \quad N = [p_1^c] + \dots + [p_\ell^c] , \quad \text{où les } p_i \text{ sont premiers.}$$

Soit  $r_\ell(N)$  le nombre de représentations de  $N$  sous la forme (1).  $G(c)$  est le plus petit entier  $\ell$  vérifiant la condition précédente. On pose  $\gamma = 1/c$  et  $r = \log N$  .

THÉORÈME 1. - Pour  $\ell \geq 1650c^3 \log c$  , on a

$$r_\ell(N) = \frac{(\Gamma(\gamma))^\ell}{\Gamma(\gamma\ell)} \frac{N^{\gamma\ell-1}}{\log^\ell N} + o\left(\frac{N^{\gamma\ell-1}}{\log^\ell N}\right) .$$

THÉORÈME 2.

$$G(c) \leq [c + 1] + 4c(\log c + \frac{1}{2} \log \log c + 5,8) .$$

On sait que  $r_\ell(N) = \int_I (\sum_{p \leq N^\gamma} e(\alpha[p^c]))^\ell e(-\alpha N) d\alpha$  , où  $I$  est un intervalle de longueur 1 .

$$\text{Soit } \varphi(\alpha) = \sum_{p \leq N^\gamma} e(\alpha[p^c])$$

Lorsque  $|\alpha|$  est petit ( $|\alpha| \leq \tau^{-1}$ ) , on écrit

$$\varphi(\alpha) = \sum_{N_1} \sum_{N_1 - A < p \leq N_1} e(\alpha[p^c]) , \quad \text{où } A \text{ est fonction de } N .$$

On remplace  $e(\alpha[p^c])$  par  $e(\alpha N_1^c)$  . En utilisant le théorème de La Vallée Poussin sur le nombre de nombres premiers dans un intervalle, on arrive à

$$\varphi(\alpha) = \int_2^{N^\gamma} \frac{e(\alpha x^c)}{\log x} dx + o(\tau^{-1} AN) + o(N^{2\gamma} \exp(c_1 \sqrt{r}) A^{-1}) , \quad \text{où } c_1 > 0 ,$$

l'erreur sur  $\int_{-\tau}^{\tau^{-1}} (\varphi(\alpha))^\ell e(-\alpha N) d\alpha$  est

$$\ll (N^{\gamma\ell-1}/r^\ell) r(\tau^{-2} AN^{2-\gamma} + \tau^{-1} N^{1+\gamma} A^{-1} \exp(-c_1 \sqrt{r})) .$$

Pour obtenir une erreur qui soit  $o(N^{\gamma\ell-1}/r^\ell)$ , il faut que

$$\tau^{-2} AN^{2-\gamma} \tau^{-1} N^{1+\gamma} A^{-1} \exp(-c_1 \sqrt{r}) \text{ soit } o(1),$$

c'est-à-dire  $\tau^{-1} = o(\exp(1/3)c_1 \sqrt{r}/N)$ . On prend  $\tau^{-1} = r^\sigma/N$  où  $\sigma > 0$ . On obtient alors

$$\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} (\varphi(\alpha))^\ell e(-\alpha N) d\alpha = \frac{(\Gamma(\gamma\ell))^\ell}{\Gamma(\gamma\ell)} \frac{N^{\gamma\ell-1}}{r^\ell} + o\left(\frac{N^{\gamma\ell-1}}{r^\ell}\right).$$

Or la méthode de VINOGRADOV [9] ne permet d'obtenir une majoration

$$\varphi(\alpha) \ll N^{\gamma(1-\rho)}$$

où  $\rho > 0$  que si  $\|\alpha\| \geq N^\varepsilon/N$ ,  $\varepsilon > 0$ , ce qui donne en posant  $\lambda^{-1} = N^{(\gamma/4)-1}$ :

$$\int_{\lambda^{-1}}^{1-\lambda^{-1}} (\varphi(\alpha))^\ell e(-\alpha N) d\alpha = o\left(\frac{N^{\gamma\ell-1}}{r^\ell}\right) \text{ dès que } \ell \text{ est assez grand.}$$

A la différence de J.-M. DESHOUILLEERS qui a traité le problème de Waring (les  $p_i$  ne sont plus nécessairement premiers), nous avons ici deux sortes d'intervalles complémentaires :  $[\lambda^{-1}, 1 - \lambda^{-1}]$  et  $[\tau^{-1}, \lambda^{-1}]$ .

Lorsque  $\tau^{-1} \leq |\alpha| \leq \lambda^{-1}$ , on obtient :

$$\varphi(\alpha) \ll N^\gamma r^{-\sigma_0} \text{ où } \sigma_0 \text{ est } > 0 \text{ quelconque.}$$

En utilisant

$$\int_{r^\sigma/N}^{N^{(\gamma/4)-1}} |\varphi(\alpha)|^{2t} d\alpha \ll N^{\gamma(2t-c)}$$

pour  $t$  entier  $\geq 3c^3(\log c + 14)$ , on arrive à

$$\int_{\tau^{-1}}^{\lambda^{-1}} (\varphi(\alpha))^\ell e(-\alpha N) d\alpha = o\left(\frac{N^{\gamma\ell-1}}{r^\ell}\right)$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] DESHOUILLEERS (J.-M.). - Problème de Waring avec exposants non entiers, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 285-295.
- [2] ESTERMANN (T.). - Introduction to modern prime number theory. - Cambridge, at the University Press, 1952 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 41).
- [3] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers, New edition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1968.
- [4] HUA (L. K.). - Additive theory of prime numbers. Translated from the Chinese. - Providence, American mathematical Society, 1965 (Translations of mathematical Monographs, 13).
- [5] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). - Uniform distribution of sequences. - New York, London, Sydney [etc.], J. Wiley and Sons, 1974 (Pure and applied Mathematics, Wiley-Interscience).
- [6] RAUZY (G.). - Fonctions entières et répartition modulo 1, II, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 185-192.
- [7] RHIN (G.). - Sur la répartition modulo 1 des suites  $f(p)$ , Acta Arithmetica, Warszawa, t. 23, 1973, p. 217-248.

- [8] TITCHMARSCH (E. C.). - The theory of the Riemann zeta function. - Oxford, at the Clarendon Press, 1951.
- [9] VINOGRADOV (I. M. ). - The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. Translated from the Russian. - London, New York, Interscience Publishers, 1954.

(Texte reçu le 3 mars 1975)

Philippe TOFFIN  
U.E.R. de Sciences  
Université de Caen  
Esplanade de la Paix  
14032 CAEN CEDEX

---