

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

GEORGES RHIN

## Géométrie des nombres $p$ -adiques

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 15, n° 2 (1973-1974),  
exp. n° G9, p. G1-G7

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1973-1974\\_\\_15\\_2\\_A6\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A6_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

GÉOMETRIE DES NOMBRES p-ADIQUES

par Georges RHIN

1. Introduction.

Les résultats de cet exposé généralisent les résultats classiques de géométrie des nombres [1]. Ils ont été obtenus pour l'essentiel par E. LUTZ [2] sous une forme un peu différente.

Soient  $t$  un entier positif ou nul, et  $p_1, \dots, p_t$   $t$  nombres premiers distincts. On munit  $\mathbb{Q}_{p_j}$  ( $1 \leq j \leq t$ ) de la valeur absolue  $p_j$ -adique telle que  $|p_j|_j = p_j^{-1}$ .

Soit  $\Omega^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Q}_{p_1}^n \times \dots \times \mathbb{Q}_{p_t}^n$ . Soient  $a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}$   $n$  vecteurs linéairement indépendants de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}$   $n$  vecteurs linéairement indépendants de  $\mathbb{Q}_{p_j}^n$  pour  $1 \leq j \leq t$ .

On appelle lattice de base  $(a_i^{(j)})_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq t}$  l'ensemble  $\Lambda$  des points de  $\Omega^n$  de la forme  $(a^{(0)}_x, \dots, a^{(t)}_x)$  où  $a^{(j)}$  désigne la matrice  $n \times n$  dont les vecteurs colonnes sont  $a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}$  et  $x$  un vecteur colonne de  $\mathbb{Z}^n$ .

On note  $m(\Lambda) = \prod_{j=0}^t |\det a^{(j)}|_j$ ,  $|\cdot|_0$  désignant la valeur absolue réelle.

On appelle convexe de  $\mathbb{Q}_{p_j}$  un sous-ensemble  $M^{(j)}$  de  $\mathbb{Q}_{p_j}^n$  tel que, si  $x, y \in M^{(j)}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}_{p_j}$  avec  $|\lambda|_j \leq 1$ ,  $|\mu|_j \leq 1$ , alors  $\lambda x + \mu y \in M^{(j)}$ .

Un convexe de  $\Omega^n$  est un produit  $\mathfrak{M} = M^{(0)} \times M^{(1)} \times \dots \times M^{(t)}$ , où  $M^{(0)}$  est un convexe de  $\mathbb{R}^n$ , et  $M^{(j)}$  un convexe de  $\mathbb{Q}_{p_j}^n$  pour  $j > 0$ .

$\mathfrak{M}$  est dit symétrique par rapport à 0 si  $M^{(0)}$  l'est. Sur  $\Omega^n$ , on considère la mesure de Haar produit des mesures de Haar sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}_{p_1}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbb{Q}_{p_t}$  telles que  $\text{mes}[0, 1] = 1$  et  $\text{mes } \mathbb{Z}_{p_j} = 1$ .

$\mathfrak{F}_0$  désigne l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $x = \alpha_1 a_1^{(0)}, \dots, \alpha_n a_n^{(0)}$  avec  $0 \leq \alpha_i < 1$  pour  $1 \leq i \leq n$ , et  $\mathfrak{F}_j$  désigne  $\mathbb{Z}_{p_j} a_1^{(j)} + \dots + \mathbb{Z}_{p_j} a_n^{(j)}$ .

2. Premiers résultats.

**LEMME 1.** - Soit  $\mathcal{A}$  une partie mesurable de  $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{F}_1 \times \dots \times \mathfrak{F}_t$  telle que  $\text{mes}(\mathcal{A}) > m(\Lambda)$ ; alors il existe  $x_1 \in \mathcal{A}$ ,  $x_2 \in \mathcal{A}$ , tels que  $x_1 - x_2 \in \Lambda - \{0\}$ .

Démonstration. - Soient  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$ , et  $L(y_1, \dots, y_n)$  l'ensemble des points  $(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(t)})$  de  $\Omega^n$  tels que

$$x^{(0)} = \alpha_1 a_1^{(0)} + \dots + \alpha_n a_n^{(0)} \text{ avec } y_i \leq \alpha_i < y_i + 1$$

$$x^{(j)} \in \mathfrak{F}_j \text{ pour } j \geq 1.$$

$L(y_1, \dots, y_n)$  est donc un "translaté" du domaine fondamental  $\mathfrak{F} = \prod_{0 \leq j \leq t} \mathfrak{F}_j$ .  
D'après [1] et [2], on a donc

$$\text{mes } L(y_1, \dots, y_n) = m(\Lambda) = m(\mathfrak{F}) .$$

Soit  $M(y_1, \dots, y_n)$  l'ensemble des points

$$x^{(0)} - a^{(0)} y, x^{(1)} - a^{(1)} y, \dots, x^{(t)} - a^{(t)} y$$

tels que  $x = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(t)})$  appartienne à  $\mathcal{A} \cap L(y_1, \dots, y_n)$ .

$M(y_1, \dots, y_n)$  est un sous-ensemble mesurable de  $L(0, 0, \dots, 0) = \mathfrak{F}$ .

Supposons les ensembles  $M(y_1, \dots, y_n)$  tous disjoints ; on obtient

$$\text{mes}(\mathcal{A}) = \sum \text{mes}(\mathcal{A} \cap L(y_1, \dots, y_n))$$

puisque les ensembles  $L(y_1, \dots, y_n)$  forment un recouvrement de  $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{F}_1 \times \dots \times \mathfrak{F}_t$ .

On a donc  $\text{mes}(\mathcal{A}) = \sum \text{mes } M(y_1, \dots, y_n) \leq m(\Lambda)$ , ce qui est contradictoire. Il existe donc deux ensembles  $M(y_1, \dots, y_n)$  et  $M(y'_1, \dots, y'_n)$  d'intersection non vide. Il existe  $x_1 = (x_1^{(0)}, \dots, x_1^{(t)})$  et  $x_2 = (x_2^{(0)}, \dots, x_2^{(t)})$  appartenant à  $\mathcal{A}$  tels que

$$x_1 - (a^{(0)} y, a^{(1)} y, \dots, a^{(t)} y) = x_2 - (a^{(0)} y', a^{(1)} y', \dots, a^{(t)} y') .$$

Comme  $y \neq y'$  et  $\det a^{(j)} \neq 0$ ,  $\forall j$ ,  $x_1 - x_2$  est non nul et appartient à  $\Lambda$ .

PROPOSITION 1. - Si  $\mathfrak{M}$  est un convexe compact symétrique par rapport à 0 de  $\Omega^n$ , tel que  $\text{mes}(\mathfrak{M}) \geq 2^n m(\Lambda)$ , alors  $\mathfrak{M} \cap \Lambda \neq \{0\}$ .

Démonstration.

(a) Supposons  $\text{mes}(\mathfrak{M}) > 2^n m(\Lambda)$ .

Si  $\mathfrak{M}_1 = (\frac{1}{2} M^{(0)}) \times M^{(1)} \times \dots \times M^{(t)}$ ,  $\text{mes}(\mathfrak{M}_1) > m(\Lambda)$ . Soient  $x_1$  et  $x_2$  appartenant à  $\mathfrak{M}_1$  tels que  $x_1 - x_2 \in \Lambda - \{0\}$ .  $x_i = (x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(t)})$  avec  $\pm 2 x_i^{(0)} \in M^{(0)}$ , donc

$$x_1^{(0)} - x_2^{(0)} = \frac{1}{2} (2x_1^{(0)}) + \frac{1}{2} ((-2x_2^{(0)})) \in M^{(0)} .$$

Pour  $1 \leq j \leq t$ ,  $x_1^{(j)} - x_2^{(j)} \in M^{(j)}$ , donc  $x_1 - x_2 \in \mathfrak{M}$ .

(b) Supposons que  $\text{mes}(\mathfrak{M}) = 2^n m(\Lambda)$ .

Soit  $\mathfrak{M}_\varepsilon = ((1 + \varepsilon)M^{(0)}) \times M^{(1)} \times \dots \times M^{(t)}$  pour  $\varepsilon$  réel positif

$$\text{mes } \mathfrak{M}_\varepsilon = (1 + \varepsilon)^n \text{mes } \mathfrak{M} > 2^n m(\Lambda)$$

donc  $\mathfrak{M}_\varepsilon \cap \Lambda \neq \{0\}$ .

Comme  $\mathfrak{M}$  est compact,  $\mathfrak{M} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{M}_\varepsilon$ . Or  $\mathfrak{M}_\varepsilon \cap \Lambda$  est un ensemble fini, donc  $\mathfrak{M} \cap \Lambda \neq \{0\}$ .

DÉFINITION 1. - Le système  $(b_i^{(j)})$ ,  $1 \leq j \leq t$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $[b_i^{(j)} \in \mathbb{Q}_{p_j}^n]$ , satisfait la condition  $(A(\Lambda))$  si

$\forall j, 1 \leq j \leq t, \max_{1 \leq i \leq n} |b_i^{(j)} \cdot x|_j \leq 1 \Rightarrow x \in \mathfrak{S}_j,$   
 $b_i^{(j)} \cdot x$  désignant le produit scalaire habituel.

LEMME 2. - Pour tout  $j$  ( $1 \leq j \leq t$ ), soit  $(b_i^{(j)})$  un système de  $n$  vecteurs  
linéairement indépendants de  $\mathbb{Q}_{p_j}^n$ . Alors il existe  $\delta^{(j)} \in \mathbb{Q}_{p_j}$  tel que

$$(\delta^{(j)} b_i^{(j)}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq t,$$

vérifie la condition  $\Lambda(\Lambda)$ .

Démonstration. - Soit  $x \in \mathbb{Q}_{p_j}^n$ . On pose  $x = a^{(j)} y$ . Il faut donc vérifier que

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\delta^{(j)} b_i^{(j)} \cdot a^{(j)} y|_j \leq 1 \Rightarrow y \in \mathbb{Z}_{p_j}^n.$$

En notation matricielle  $b_i^{(j)} \cdot a^{(j)} y = {}^t(b_i^{(j)}) a^{(j)} y$ . En posant  $c_i^{(j)} = {}^t(b_i^{(j)}) a^{(j)}$ ,  
 $\max_{1 \leq i \leq n} |c_i^{(j)} y|_j$  définit une norme sur  $\mathbb{Q}_{p_j}^n$ ; comme toutes les normes sur  $\mathbb{Q}_{p_j}^n$   
sont équivalentes, il existe  $\Delta_j \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\Delta_j \max_{1 \leq i \leq n} |c_i^{(j)} y|_j \geq \max |y_i|_j, \quad \forall y \in \mathbb{Q}_{p_j}^n.$$

Il suffit de prendre  $\delta^{(j)}$  vérifiant  $|\delta^{(j)}|_j \geq \Delta_j$ .

PROPOSITION 2. - Soient  $(b_1^{(0)}, \dots, b_n^{(0)})$   $n$  vecteurs linéairement indépen-  
dants de  $\mathbb{R}^n$  et, pour  $1 \leq j \leq t$ ,  $(b_1^{(j)}, \dots, b_n^{(j)})$   $n$  vecteurs linéairement indépen-  
dants de  $\mathbb{Q}_{p_j}^n$  satisfaisant la condition  $\Lambda(\Lambda)$ . Soient  $c_i^{(j)}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  
 $0 \leq j \leq t$ , des réels tels que

$$c_i^{(j)} > 0$$

$$c_i^{(j)} \leq 1 \text{ pour } j \geq 1 \text{ et } c_i^{(j)} \in \mathbb{P}_{p_j}^{\mathbb{Z}}.$$

Posons  $|\det(b_1^{(j)}, \dots, b_n^{(j)})|_j = d_j$  et  $d = \prod_{j=0}^t d_j$ . Alors si

$$m(\Lambda) d \leq \prod_{j=0}^t \prod_{i=1}^n c_i^{(j)},$$

il existe  $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(t)}) \neq 0$  appartenant à  $\Lambda$  tel que

$$|b_i^{(j)} \cdot x^{(j)}|_j \leq c_i^{(j)}, \quad \forall i, 1 \leq i \leq n, \quad \forall j, 0 \leq j \leq t.$$

Démonstration. - Soit  $\mathfrak{M} = \{x \in \Omega^n; |b_i^{(j)} \cdot x^{(j)}|_j \leq c_i^{(j)}, \forall i, \forall j\}$ .  $\mathfrak{M}$   
est évidemment un convexe compact, symétrique par rapport à 0.

$$\text{mes } \mathfrak{M} = \prod_{j=0}^t \text{mes } M^{(j)}.$$

D'après [1],  $\text{mes } M^{(0)} = 2^n (\prod_{i=1}^n c_i^{(0)}) / d_0$ .

D'après [2],  $\text{mes } M^{(j)} = 1/d_j \prod_{i=1}^n c_i^{(j)}$  pour  $j \geq 1$ .

On a donc  $\text{mes } \mathfrak{M} = 2^n (\prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^t c_i^{(j)}) / (\prod_{j=0}^t d_j) \geq 2^n m(\Lambda)$ .

On peut donc appliquer la proposition 1.

### 3. Les minima successifs.

Soient  $(b_1^{(j)}, \dots, b_n^{(j)})$ ,  $1 \leq j \leq t$ ,  $n$  vecteurs linéairement indépendants

de  $\mathbb{Q}_{p_j}^n$  satisfaisant la condition  $A(\Lambda)$ . Soient  $c_i^{(j)} \in p_j^{-N}$  pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq t$ .  $M^{(j)}$  désigne l'ensemble des  $x^{(j)} \in \mathbb{Q}_{p_j}^n$  tels que  $|b_i^{(j)} \cdot x^{(j)}|_j \leq c_i^{(j)}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Soit  $M^{(0)}$  un convexe compact symétrique par rapport à 0 tel que  $\text{mes } M^{(0)} > 0$ . On pose  $\mathcal{M} = M^{(0)} \times M^{(1)} \times \dots \times M^{(t)}$ .

DÉFINITION 2. - Soit  $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(t)}) \in \Omega^n$ . On pose

$$F^{(j)}(x^{(j)}) = \max_{1 \leq i \leq n} (1/c_i^{(j)}) |b_i^{(j)} \cdot x^{(j)}|_j \quad \text{pour } j \geq 1,$$

$$F^{(0)}(x^{(0)}) = \inf_{x^{(0)} \in \lambda M^{(0)}} |\lambda|,$$

$$F(x) = \prod_{j=0}^t F^{(j)}(x^{(j)}).$$

On définit les minima successifs de  $\mathcal{M}$  par rapport à  $\Lambda$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} m_1 &= \min_{x \in \Lambda - \{0\}} F(x) = F(x_1) \\ &\vdots \\ m_i &= \min_{x \in \Lambda} F(x) = F(x_i) \quad 2 \leq i \leq n \end{aligned}$$

$(x_1, \dots, x_{i-1})$   $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants.

Soit  $p$  un nombre premier. Pour  $1 \leq j \leq t$ ,

$$F^{(j)}(px^{(j)}) = \begin{cases} F^{(j)}(x^{(j)}) & \text{si } p \neq p_j \\ p^{-1} F^{(j)}(x^{(j)}) & \text{si } p = p_j \end{cases}$$

et

$$F^{(0)}(px^{(0)}) = p F^{(0)}(x^{(0)}).$$

On a donc  $F(px) \geq F(x)$  pour tout nombre premier  $p$ , et il suffira de considérer les minima sur les points primitifs de  $\Lambda$  c'est-à-dire sur les points  $(a^{(0)}y, \dots, a^{(t)}y)$  tels que  $y_1, \dots, y_n$  soient premiers dans leur ensemble.

PROPOSITION 3. - Les minima successifs de  $\mathcal{M}$  par rapport à  $\Lambda$  existent, et vérifient  $0 < m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n < +\infty$ .

Démonstration.

(a) Pour tout  $\alpha > 0$ , il n'existe qu'un nombre fini de points primitifs  $x$  de  $\Lambda$  tels que  $F(x) \leq \alpha$ . Supposons qu'il en existe une infinité ; il existe alors une suite  $(x_k)$  et un indice  $j$  tels que

$$\begin{aligned} F^{(0)}(x_k^{(0)}) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty \\ F^{(j)}(x_k^{(j)}) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Comme  $x_k^{(j)} = a^{(j)}y_k$  avec  $y_k \in \mathbb{Z}^n$

$$\max_{1 \leq i \leq n} (1/c_i^{(j)}) |b_i^{(j)} a^{(j)} y_k|_j \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Toutes les normes de  $\mathbb{Q}_{p_j}^n$  étant équivalentes, il existe un entier  $k_0$  tel que

$k > k_0$  entraîne

$$\max_{1 \leq i \leq n} |y_{k,i}|_j < 1 .$$

Ceci entraîne que  $p_j$  divise  $(y_{k,1}, \dots, y_{k,n})$  pour  $k \geq k_0$ , ce qui est impossible.

(b) Soient  $y_1, \dots, y_n$   $n$  points de  $\Lambda$ ,  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants et primitifs. Si  $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} F(y_i)$ , d'après (a) il existe un nombre fini d'éléments  $z_\ell$  ( $\ell \in S$ ) de  $\Lambda$  primitifs tels que  $F(z_\ell) \leq \alpha$ . On a  $m_1 = \min_{\ell \in S} F(z_\ell) = F(x_1)$ , ce qui montre bien  $m_1 > 0$ .

Supposons  $m_1, \dots, m_{i-1}$ , définis avec  $m_k = F(x_k)$  pour  $1 \leq k \leq i-1$ . Il n'existe qu'un nombre fini  $N$  d'éléments  $z_\ell$  de  $\Lambda$  primitifs, linéairement indépendants de  $(x_1, \dots, x_{i-1})$ , tels que  $F(z_\ell) \leq \alpha$ .  $N$  est non nul; en effet, il existe un  $y_i$  ( $y_1$  par exemple) tel que  $x_1, \dots, x_{i-1}, y_1$  soient linéairement indépendants.

De plus,  $x_1, \dots, x_{i-2}, z_\ell$  sont linéairement indépendants, donc  $F(z_\ell) \geq m_{i-1}$ . On a  $m_n \leq \alpha$ .

#### 4. Une généralisation du deuxième théorème de Minkowski.

Soit  $\mathcal{M}$  un convexe de  $\Omega^n$  défini comme dans le paragraphe précédent.

Soient  $\tau^{(j)}$ ,  $0 \leq j \leq t$ ,  $t+1$  matrices  $n \times n$  inversibles à coefficients dans  $\mathbb{R}$  si  $j=0$ , dans  $\mathbb{Q}_{p_j}$  si  $j \geq 1$ .  $\tau\Lambda$  désigne l'ensemble des points  $(\tau^{(0)} a^{(0)}_x, \dots, \tau^{(t)} a^{(t)}_x)$  pour  $x \in \mathbb{Z}^n$  et

$$G^{(j)}(y) = F^{(j)}((\tau^{(j)})^{-1} y) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} y \in \mathbb{R}^n & \text{si } j=0 \\ y \in \mathbb{Q}_{p_j}^n & \text{si } j \geq 1 \end{cases}$$

On pose

$$(\tau\mathcal{M})^{(j)} = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{Q}_{p_j}^n \text{ tels que } G^{(j)}(y) \leq 1\}$$

et

$$\tau\mathcal{M} = (\tau\mathcal{M})^{(0)} \times (\tau\mathcal{M})^{(1)} \times \dots \times (\tau\mathcal{M})^{(t)} .$$

LEMME 3. - Les minima successifs de  $\tau\mathcal{M}$  par rapport à  $\tau\Lambda$  sont les minima successifs de  $\mathcal{M}$  par rapport à  $\Lambda$  et

$$m(\Lambda) \text{ mes}(\tau\mathcal{M}) = m(\tau\Lambda) \cdot \text{mes}(\mathcal{M}) .$$

Démonstration. - Pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ ,  $G^{(j)}(\tau^{(j)} a^{(j)}_x) = F^{(j)}(a^{(j)}_x)$ , ce qui montre l'égalité des minima successifs

$$\begin{aligned} m(\tau\Lambda) &= \prod_{j=0}^t |\det(\tau^{(j)} a^{(j)})|_j \\ &= \left( \prod_{j=0}^t |\det \tau^{(j)}|_j \right) \cdot m(\Lambda) . \end{aligned}$$

D'autre part, comme  $(\tau\mathcal{M})^{(j)} = \tau^{(j)} M^{(j)}$

$$\begin{aligned} \text{mes}(\tau\mathcal{M}) &= \prod_{j=0}^t |\det(\tau^{(j)})|_j \cdot \text{mes} M^{(j)} \\ &= \text{mes}(\mathcal{M}) \cdot \prod_{j=0}^t |\det(\tau^{(j)})|_j . \end{aligned}$$

THÉORÈME 1. - Soit  $\mathcal{M}$  le convexe de  $\Omega^n$  défini dans le paragraphe précédent, et soient  $m_1, \dots, m_n$  ses minima successifs par rapport à  $\Lambda$ . Alors

$$(1) \quad m(\Lambda) \cdot \frac{2^n}{n!} \leq m_1, \dots, m_n \quad \text{mes}(\mathcal{M}) \leq 2^n m(\Lambda) .$$

Démonstration.

(a) Si  $\tau^{(j)} = (a^{(j)})^{-1}$ ,  $\tau\Lambda$  est alors la diagonale de  $(\underline{Z}^n)^{t+1}$  que l'on notera  $\underline{Z}^n$ . D'après le lemme précédent, (1) devient

$$(2) \quad \frac{2^n}{n!} \leq m_1, \dots, m_n \quad \text{mes}(\tau\mathcal{M}) \leq 2^n$$

où  $t(a^{(j)}) b_i^{(j)}$  vérifie la condition  $\Lambda(\underline{Z}^n)$ . On suppose dans la suite que  $\Lambda = \underline{Z}^n$ .

(b) Démontrons  $2^n/n! \leq m_1, \dots, m_n \text{mes}(\mathcal{M})$ . Soient  $x_1, \dots, x_n$  les points de  $\underline{Z}^n$  tels que  $F(x_i) = m_i$ . Soient  $\mu_i^{(j)} \in \underline{Q}_{p_j}$  pour  $j \geq 1$  et  $\mu_i^{(0)} \in \underline{R}$  pour  $1 \leq i \leq n$  tels que

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n |\mu_i^{(0)}| F^{(0)}(x_i) \leq 1 ,$$

$$(4) \quad \max_{i=1, \dots, n} (|\mu_i^j|_j F^{(j)}(x_i)) \leq 1 .$$

On vérifie aisément que

$$F^{(j)} \left( \sum_{i=1}^n \mu_i^{(j)} x_i \right) \leq 1 \quad 0 \leq j \leq t$$

ce qui montre que

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^{(j)} x_i \in M^{(j)} \quad \text{pour tout } j .$$

Pour  $j = 0$ , l'ensemble des points  $\sum_{i=1}^n \mu_i^{(0)} x_i$  est de mesure

$$\frac{2^n}{n!} (|\det(x_1, \dots, x_n)|_0) / \left( \prod_{i=1}^n F^{(0)}(x_i) \right) \leq \text{mes} M^{(0)} .$$

Pour  $j \geq 1$ , l'ensemble des points  $\sum_{i=1}^n \mu_i^{(j)} x_i$  est de mesure

$$\left( |\det(x_1, \dots, x_0)|_j \right) / \left( \prod_{i=1}^n F^j(x_i) \right) \leq \text{mes} M^{(j)} .$$

Comme  $\det(x_1, \dots, x_n)$  est un entier non nul,  $\prod_{j=0}^t |\det(x_1, \dots, x_n)|_j \geq 1$ , et par conséquent

$$(5) \quad \frac{2^n}{n!} \left( \prod_{j=0}^t |\det(x_1, \dots, x_n)|_j \right) / (F(x_1), \dots, F(x_n)) \leq \text{mes}(\mathcal{M})$$

entraîne  $2^n/n! \leq (\text{mes} \mathcal{M}) \cdot m_1, \dots, m_n$

(c) Démontrons  $m_1, \dots, m_n \leq 2^n$ . Soit  $\Lambda_C$  le sous-réseau de  $\underline{Z}^n$  des points  $x \in \underline{Z}^n$  tels que  $x \in M^{(j)}$  pour  $1 \leq j \leq t$ . Alors, d'après [2], l'indice du sous-groupe  $\Lambda_C$  de  $\underline{Z}^n$  est  $I(\Lambda_C) = \left\{ \prod_{j=1}^t \text{mes}(x \in \underline{Z}^n \mid F^{(j)}(x)|_j \leq 1) \right\}^{-1}$ .

Puisque  $M^{(j)} \subset \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}_j}^n$  [condition  $A(\mathbb{Z}^n)$ ], on a

$$I(\Lambda_{\mathbb{C}}) = \prod_{j=1}^{j=t} (\text{mes } M^{(j)})^{-1} = (\text{mes}(M^{(0)})) / \text{mes } \mathfrak{M} .$$

D'après le théorème de Minkowski [1], il existe  $n$  points de  $\Lambda_{\mathbb{C}}$  linéairement indépendants  $y_1, \dots, y_n$  tels que

$$\prod_{i=1}^{i=n} F^{(0)}(y_i) \leq (2^n I(\Lambda_{\mathbb{C}})) / (\text{mes}(M^{(0)})) .$$

Puisque  $y_i \in \Lambda_{\mathbb{C}}$ ,  $F(y_i) \leq F^{(0)}(y_i)$ ; on a donc  $\prod_{i=1}^{i=n} F(y_i) \leq 2^n / \text{mes}(\mathfrak{M})$ .

Supposons  $F(y_1) \leq F(y_2) \leq \dots \leq F(y_n)$ ; alors  $m_i = F(x_i) \leq F(y_i)$ ,  $\forall i=1, \dots, n$  et  $\prod_{i=1}^{i=n} F(x_i) \leq 2^n / \text{mes}(\mathfrak{M})$ .

COROLLAIRE. - Soient  $(x_1, \dots, x_n)$  des points de  $\Lambda$  tels que  $F(x_i) = m_i$ , alors si  $x_i = (a^{(0)} y_i, \dots, a^{(t)} y_i)$ , on a

$$1 \leq \prod_{j=0}^t |\det(y_1, \dots, y_n)|_j \leq n!$$

Il suffit de comparer (5) et (2).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to diophantine approximation. - Cambridge, the University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics. n° 45).
- [2] LUTZ (Elisabeth). - Sur les approximations diophantiennes linéaires  $p$ -adiques. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1224; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 12).

(Texte reçu le 21 mars 1974)

Georges RHIN  
44 rue de Touraine  
57160 MOULINS LES METZ