Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

MICHEL WALDSCHMIDT

Minorations effectives de formes linéaires de logarithmes (aperçu historique)

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 2 (1973-1974), exp. nº G3, p. G1-G8

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'Etude de théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° G3, 8 p.

5 novembre 1973

MINORATIONS EFFECTIVES DE FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES
(APERCU HISTORIQUE)

par Michel WALDSCHMIDT

En 1934, A. O. GEL'FOND et T. SCHNEIDER, indépendamment l'un de l'autre, démontrèrent que le quotient de deux logarithmes de nombres algébriques (différents de 0 et 1) est rationnel ou transcendant ; ils résolvaient ainsi le septième problème de D. HILBERT.

En raffinant sa démonstration, A. O. GEL'FOND obtint une minoration effective pour la valeur absolue de

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 ,$$

quand β_1 et β_2 sont des nombres algébriques non nuls, et α_1 , α_2 des nombres algébriques différents de 0 et 1 , avec $\log \alpha_1/\log \alpha_2$ irrationnel (GEL'FOND, [1]. Voir à ce sujet CIJSOUW, [40]).

Pour des formes linéaires en un nombre quelconque de logarithmes de nombres algébriques, A. O. GEL'FOND avait montré, en utilisant le théorème de Thue-Siegel-Roth, l'existence d'une borne inférieure non triviale (mais aussi non effective) quand les β_i sont des entiers rationnels. Puis il avait remarqué qu'un tel résultat effectif serait très utile pour résoudre certains problèmes difficiles de théorie des nombres.

Le premier énoncé effectif de ce type a été donné par A. BAKER [2]. Il a été souvent raffiné depuis, et le but de cet exposé est de présenter les principales variantes du théorème de Baker.

Sous forme non effective, le résultat est le suivant.

Soient $\ell_1 , \ldots , \ell_n$ des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques. Alors les nombres $1 , \ell_1 , \ldots , \ell_n$ sont linéairement indépendants sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques.

1. Formes linéaires homogènes à coefficients algébriques.

Soient $\alpha_1 , \ldots , \alpha_n$ $(n \geq 3)$ *des nombres algébriques non nuls, de degré* $\leq d$, *et de hauteur* (maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme minimal) *inférieure ou égale à* $A_1 , \ldots , A_n$ *respectivement. Soient* $\beta_1 , \ldots , \beta_n$ *des nombres algébriques, de degré* $\leq d$ *et de hauteur* $\leq B$. On fixe une détermination du logarithme aux points $\alpha_1 , \ldots , \alpha_n$ (les constantes C dépendront de ce choix), et *on s'intéresse à la quantité*

$$\Lambda_1 = |\beta_1 \log \alpha_1 + \ldots + \beta_n \log \alpha_n| .$$

Le premier papier de BAKER [2] concernait le cas où $\alpha_1 , \dots , \alpha_n$ sont multiplicativement indépendants (c'est-à-dire où $2i\pi$, $\log \alpha_1 , \dots , \log \alpha_n$ sont $\underset{\sim}{Q}$-linéairement indépendants), et $\beta_1 , \dots , \beta_n$ ne sont pas tous nuls. Alors, si $\varkappa > n + 1$, il existe une constante $C = C(n , \alpha_1 , \dots , \alpha_n , \varkappa , d)$, effectivement calculable (comme le seront toutes les constantes C dans la suite), telle que

$$\Lambda_1 > C \exp(- (\log B)^{\varkappa}) .$$

Dans son deuxième article (BAKER [3]), il montra que, si on suppose $\varkappa > 2n + 1$, alors l'hypothèse " $\alpha_1 , \dots , \alpha_n$ multiplicativement indépendants" peut être remplacée par " $\log \alpha_1 , \dots , \log \alpha_n$ $\underset{\sim}{Q}$-linéairement indépendants". Ensuite (BAKER [6]), il améliora ces résultats en supposant seulement $\varkappa > n$, à condition que $\log \alpha_1 , \dots , \log \alpha_n$, ou bien $\beta_1 , \dots , \beta_n$, soient $\underset{\sim}{Q}$-linéairement indépendants.

Les travaux suivants étaient motivés par la recherche des corps quadratiques imaginaires ayant un nombre de classes donné. Le problème du nombre de classes 1 était résolu dans le premier papier de BAKER [2] (une solution algébrique était découverte par H. M. STARK dans le même temps), et le problème du nombre de classes 2 fut bientôt ramené à celui de la recherche d'une minoration de Λ_1 (GOLDSTEIN, [23], BAKER, [25], STARK, [26]). A. BAKER et H. M. STARK remarquèrent que, dans ce problème, les nombres $\alpha_1 , \dots , \alpha_{n-1}$ avaient des hauteurs bornées, tandis que la hauteur de α_n pouvait être très grande.

C'est ainsi que BAKER [25], considérant le cas particulier $n = 3$, et $\log \alpha_1 = i\pi$, montra que, si $i\pi$, $\log \alpha_2$, $\log \alpha_3$ sont $\underset{\sim}{Q}$-linéairement indépendants, si β_1 , β_2 , β_3 ne sont pas tous nuls, et si ε et δ sont deux nombres réels positifs, alors il existe une constante $C = C(A_2 , d , \varepsilon , \delta)$ telle que, pour tout entier H vérifiant

$$\log B < (\log H)^3 , \text{ et } \Lambda_1 < \exp(- \delta H) ,$$

on ait

$$H < C(\log A_3)^{1+\varepsilon} .$$

Ce résultat a été généralisé par A. BAKER et H. M. STARK [28] à n logarithmes : soient $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$; on suppose

$$0 < \Lambda_1 < \exp(- \delta H) ;$$

alors on a

$$H < \max(C(\log A_n)^{1+\varepsilon} ; \exp(\log B)^{1/3}) ,$$

avec $C = C(n , d , \varepsilon , \delta , A_1 , \dots , A_{n-1})$.

(A. BAKER [30] annoncera plus tard la possibilité de remplacer la conclusion par

$$H < C(\log A_n)^{1+\varepsilon} \log B).$$

Dans ce domaine, mentionnons deux articles de H. M. STARK ([26] et [31]) qui concernent le cas $\beta_1 = \sqrt{-D}$, β_2 , ... , β_n et D entiers rationnels, $D > 0$, $\alpha_1 = -1$, α_2 , ... , α_n unités fondamentales de corps quadratiques réels. Les constantes effectives y sont calculées explicitement.

Pour étudier les nombres ayant un grand facteur premier, T. N. SHOREY [39] s'est intéressé aux formes linéaires dont les coefficients sont petits :

$$B \leq (\log A)^{100} \text{ , avec } A = \max_{1\leq i\leq n} A_i \text{ ;}$$

dans ce cas, si α_1 , ... , α_n sont multiplicativement indépendants, et si $\beta_n = -1$ et $\varepsilon > 0$, alors

$$\Lambda_1 > C \exp(-(\log A)^{n^2+\varepsilon}) \text{ ,}$$

où C ne dépend que de ε et d .

Nous terminerons cette première partie en énonçant un théorème très important de H. M. STARK [37], qui contient à peu près tous les résultats précédents (ainsi qu'un théorème de K. RAMACHANDRA [14]).

THÉORÈME 1. - *Si on a*

$$\varepsilon > 0 \text{ ; } \delta > 0 \text{ ; } \log B < (\log H)^2 \text{ , et } 0 < \Lambda_1 < \exp(-\delta H) \text{ ,}$$

alors

$$H < C \prod_{j=1}^{n} (\log A_j)^{1+\varepsilon} \text{ ,}$$

où $C = C(n , d , \varepsilon , \delta)$ *est effectivement calculable.*

STARK précise que l'hypothèse $\log B < (\log H)^2$ peut être remplacée par $\log B < H^{\varkappa}$, avec $\varkappa < \varepsilon/8n$ et $C = C(\varkappa , n , d , \varepsilon , \delta)$.

2. Formes linéaires non homogènes à coefficients algébriques.

Soient α_1 , ... , α_n $(n \geq 2)$ *des nombres algébriques non nuls de degré* $\leq d$ *et de hauteur inférieure ou égale à* A_1 , ... , A_n *respectivement. Soient* β_0 , ... , β_n *des nombres algébriques de degré* $\leq d$ *et de hauteur* $\leq B$. *On considère*

$$\Lambda_2 = |\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n|$$

(Quand $\beta_0 = 0$, on a $\Lambda_2 = \Lambda_1$).

N. I. FEL'DMAN [4] semble être le premier à avoir établi une minoration pour Λ_2 , dans un cas très particulier (les α_i et β_j sont dans un même corps quadratique imaginaire, et les α_i sont proches de 1).

Néanmoins, le plus ancien résultat général est encore dû à A. BAKER [6] : si $\beta_0 \neq 0$, et si $\varkappa > n + 1$, il existe une constante positive $C = C(n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \varkappa, d)$ telle que

$$\Lambda_2 > C \exp(-(\log B)^{\varkappa}) \text{ .}$$

Ce résultat a été substantiellement amélioré par N. I. FEL'DMAN ([10], [11], [12]) qui montre l'existence de deux constantes positives C et $\varkappa$, ne dépendant que de n, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, d, telles que, si $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et $\beta_0, \ldots, \beta_n$ non tous nuls, on ait

$$\Lambda_2 > C.B^{-\varkappa} .$$

De plus, FEL'DMAN explicite les valeurs de C et $\varkappa$ en fonction de n, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, d, et d'une constante absolue effective.

Enfin, A. BAKER [36] a amélioré ce résultat sous la forme suivante.

THÉORÈME 2. - *On suppose* $A_n \geq 4$, $B \geq 4$, *et* $\Lambda_2 \neq 0$. *Alors on a*

$$\Lambda_2 > (B \log A_n)^{-C \log A_n} ,$$

où C *est une constante effectivement calculable en fonction de* $A_1, \ldots, A_{n-1}$, n *et* d.

Un point de vue très différent a été adopté par P. L. CIJSOUW [40], qui minore Λ_2 sous la forme

$$\Lambda_2 > \exp\{- N^{n^2+n+\varepsilon} S(\log S)^{n+1+\varepsilon}\} ,$$

où $S = N + \log H$, N est le degré de β_0, H sa hauteur, $\varepsilon > 0$, et $S > S_0(\varepsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$.

3. Formes linéaires homogènes à coefficients rationnels.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *des nombres algébriques non nuls, de degré* $\leq d$ *et de hauteur inférieure ou égale à* $A_1, \ldots, A_n$ *respectivement. Soient* $b_1, \ldots, b_n$ *des entiers rationnels, avec* $\max_{1\leq i\leq n} |b_i| \leq B$. *On cherche à minorer*

$$\Lambda_3 = |b_1 \log \alpha_1 + \ldots + b_n \log \alpha_n| .$$

Il est facile de montrer qu'il existe une constante $C = C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, effectivement calculable, telle que

$$(\Lambda_3 \neq 0) \Longrightarrow (|\Lambda_3| > \exp - CB) ;$$

(voir GEL'FOND [1], chap. I, §3, théorème IV, BAKER [3], lemme 5, ou BAKER [6], lemme 6).

La méthode de BAKER permet de minorer Λ_3 de manière non triviale (d'ailleurs nous l'avons vu au §1, puisque Λ_3 est un cas particulier de la forme linéaire Λ_1). Ainsi A. BAKER ([5], [8]) démontra d'abord que, si $B < H^g$ (g entier > 0), $\varkappa > n + 2$, $0 < \Lambda_3 < \exp(- \delta H)$, $\delta > 0$, et si l'équation

$$k_1 \log \alpha_1 + \ldots + k_n \log \alpha_n = 0$$

n'a pas de solution $(k_i) \in \mathbb{Z}^n$ avec $\max|k_i| \leq H$, alors on a

$$H \leq \max(C , (\log A_n)^{\varkappa}) ,$$

avec $C = C(n , g , d , \delta , \varkappa , A_1 , \ldots , A_{n-1} , \max(|\alpha_n| , |\alpha_n|^{-1}))$. On peut choisir $\varkappa > n + 1$ si tous les α_i sont réels, et N. I. FEL'DMAN [17] a remplacé cette hypothèse par $\varkappa > n - 1$. Un exemple de calcul effectif de la constante C est donné dans un cas particulier ($n = 3$, $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3$ multiplicativement indépendants) par P. BUNDSCHUH et A. HOCK [18]. Enfin ce résultat a été traduit en p-adique par J. COATES ([16], [19]) .

Poursuivant ses recherches, A. BAKER [15] établit que, pour $0 < \delta \leqslant 1$, $d \geqslant 4$, $H \geqslant B$, $A = \max_{1\leq i\leq n}(A_i , 4)$, $\Lambda_3 \neq 0$, et

$$H \geqslant (4^{n^2} \delta^{-1} d^{2n} \log A)^{(2n+1)^2} ,$$

on a

$$\Lambda_3 \geqslant \exp(- \delta H) .$$

Les travaux suivants établirent une dissymétrie entre $A_1 , \ldots , A_{n-1}$ d'une part, et A_n d'autre part. Ainsi BAKER [30] montra l'existence d'une constante $C = C(n , d , A_1 , \ldots , A_{n-1})$ telle que, pour $B \geqslant 2$ et $\Lambda_3 \neq 0$, on ait

$$\Lambda_3 \geqslant C^{-\log A_n \log B} .$$

(Ce résultat contient celui de N. I. FEL'DMAN ([29], [33]) : si $b_n = - 1$, $H \geqslant B$ et $0 < \Lambda_3 < \exp(- \delta H)$, alors on a $H < C(1 + \log A_n)$).

Enfin A. BAKER [35] généralisa ce résultat sous la forme suivante.

THÉORÈME 3. - Il existe une constante $C = C(n , d , A_1 , \ldots , A_{n-1})$, effectivement calculable, telle que, pour $0 < \delta < \frac{1}{2}$, $B' \geqslant \max(|b_1| , \ldots , |b_{n-1}|)$, $B_n \geqslant |b_n|$ et $\Lambda_3 \neq 0$, on ait

$$\Lambda_3 \geqslant (\frac{\delta}{B'})^{C \log A_n} \exp(- \delta B_n) .$$

Mentionnons aussi les travaux de K. RAMACHANDRA et T. N. SHOREY [38], et de T. N. SHOREY [39], concernant des nombres α_i rationnels.

4. Compléments.

La recherche de minorations effectives de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques p-adiques a fait l'objet de travaux de V. G. SPRINDZUCK ([7], [9], [13], [22], [27]) pour les formes linéaires homogènes à coefficients algébriques, et de J. COATES [16], [19] (déjà cité) pour les formes linéaires homogènes à coefficients rationnels.

Les résultats actuels (en particulier les théorèmes 1, 2 et 3 précédents) ne sont pas loin d'être les meilleurs possibles. Néanmoins on espère pouvoir remplacer l'inégalité

$$H < C \prod_{j=1}^{n} (\log A_j)^{1+\varepsilon}$$

du théorème 1 par

$$H < C(\log A)^{1+\varepsilon} ,$$

avec $A = \max_{1 \le j \le n} A_j$ (cf. STARK [37]). Si ce résultat pouvait être établi au moins dans le cas particulier où les β_i sont rationnels (c'est-à-dire pour Λ_3), il aurait d'intéressantes applications (GOLDSTEIN [23]).

On espère aussi améliorer le théorème 2 sous la forme

$$\Lambda_2 > C^{-\log A_n \log B} ,$$

(BAKER, [36]) comme cela a été fait dans le cas $\beta_0 = 0$, $\beta_i \in \underset{\sim}{Z}$ (voir §3).

On trouvera des exposés généraux sur ces questions dans les articles de A. BAKER ([20], [24], [34]), H. M. STARK [32] et J.-P. SERRE [21].

D'autres références concernant les formes linéaires

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 \quad \text{et} \quad \beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2$$

pourront être trouvées dans la thèse de P. L. CIJSOUW [40].

BIBLIOGRAPHIE

Les références sont données dans l'ordre chronologique ; et à la fin de certaines d'entre elles est indiquée la date de réception du manuscrit.

[1] GEL'FOND (A. O.). - Transcendental and algebraic numbers. - New York, Dover Publications, 1960 ; et [en russe] Moskva, Edition d'état de Littérature technique théorique, 1952.

[2] BAKER (A.). - Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, I., Mathematika, London, t. 13, 1966, p. 204-216 [17.10.1966].

[3] BAKER (A.). - Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, II., Mathematika, London, t. 14, 1967, p. 102-107 [21.3.1967].

[4] FEL'DMAN (N. I.). - Estimation of the absolute value of a linear form from logarithms of certain algebraic numbers, Math. Notes, New York, t. 2, 1967, p. 634-640 ; et [en russe] Mat. Zametki, t. 2, 1967, p. 245-256 [25.4.1967].

[5] BAKER (A.). - Contributions to the theory of diophantine equations, I : On the representation of integers by binary forms, Phil. Trans. Royal Soc. London, Séries A, t. 263, 1969, p. 173-191 [4.5.1967].

[6] BAKER (A.). - Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, III., Mathematika, London, t. 14, 1967, p. 220-228 [5.6.1967].

[7] SPRINDZUK (V. G.). - Concerning Baker's theorem on linear forms in logarithms [en russe], Dokl. Akad. Nauk B. S. S. R., Minsk, t. 11, 1967, p. 767-769 [29.6.1967].

[8] BAKER (A.). - Contributions to the theory of diophantine equations, II : The diophantine equation $y^2 = x^3 + k$, Phil. Trans. Royal Soc. London, Séries A, t. 263, 1969, p. 193-208 [24.8.1967].

[9] SPRINDZUK (V. G.). - Effectivization in certain problems of diophantine approximation theory [en russe], Dokl. Akad. Nauk. B. S. S. R., Minsk, t. 12, 1968, p. 293-297 [19.1.1968].

[10] FEL'DMAN (N. I.). - Estimate for a linear form of logarithms of algebraic numbers, Mathematics of the USSR-Sbornik, t. 5, 1968, p. 291-307 ; et [en russe] Mat. Sbornik, t. 76, 1968, n° 2, p. 304-319 [29.1.1968].

[11] FEL'DMAN (N. I.). - On a linear form in the logarithm of algebraic numbers, Soviet Mathematics, Providence, t. 9, 1968, p. 1284-1285 ; et [en russe] Dokl. Akad. Nauk SSSR, t. 182, 1968, p. 1278-1279 [23.2.1968].

[12] FEL'DMAN (N. I.). - Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers, Mathematics of the USSR-Sbornik, t. 6, 1968, p. 393-406 ; et [en russe] Mat. Sbornik, t. 77, 1968, n° 3, p. 423-436 [2.4.1968].

[13] SPRINDZUK (V. G.). - Estimates of linear forms with p-adic logarithms of algebraic numbers [en russe], Vesci Akad. navuk Belaruskaj S. S. R., t. 4, 1968, p. 5-14 [9.4.1968].

[14] RAMACHANDRA (K.). - A note on Baker's method, J. Austral. math. Soc., t. 10, 1969, p. 197-203 [3.6.1968]

[15] BAKER (A.). - Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, IV., Mathematika, London, t. 15, 1968, p. 204-216 [12.6.1968].

[16] COATES (J.). - An effective p-adic analogue of a theorem of Thue, I., Acta Arithmetica, Warszawa, t. 15, 1968/69, p. 272-305 [20.6.1968].

[17] FEL'DMAN (N. I.). - An inequality for a linear form in the logarithms of algebraic numbers, Math. Notes, New York, t. 5, 1969, p. 408-412 ; et [en russe] Mat. Zametki, t. 5, 1969, p. 681-689 [4.10.1968].

[18] BUNDSCHUH (P.) und HOCK (A.). - Bestimmung aller imaginärquadratischen Zahlkörper der Klassenzahl Eins mit Hilfe eines Satzes von Baker, Math. Z., t. 111, 1969, p. 191-204 [9.12.1968].

[19] COATES (J.). - An effective p-adic analogue of a theorem of Thue, II : The greatest prime factor of a binary form, Acta Arithmetica, t. 16, 1970, p. 399-412 [2.5.1969].

[20] BAKER (A.). - Effective methods in diophantine problems ; "Number theory institute", p. 195-205. - Providence, American mathematical Society, 1971 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 20) [juillet 1969].

[21] SERRE (J.-P.). - Travaux de Baker, Séminaire Bourbaki, 22e année, 1969/70, n° 368, p. 73-86. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 180) [novembre 1969].

[22] SPRINDZUK (V. G.). - A new application of p-adic analysis to representation of numbers by binary forms, Mathematics of the USSR-Izvestija, t. 4, 1970, p. 1043-1069 ; et [en russe] Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., t. 34, 1970, p. 1038-1063 [10.2.1970].

[23] GOLDSTEIN (L. J.). - Imaginary quadratic fields of class number 2 , J. Number Theory, t. 4, 1972, p. 286-301 [15.8.1970].

[24] BAKER (A.). - Effective methods in the theory of numbers, Actes du Congrès international des mathématiciens [1970. Nice]. Vol. 1, p. 19-26. - Paris, Gauthier-Villars, 1971 [Septembre 1970].

[25] BAKER (A.). - Imaginary quadratic fields with class number 2 , Annals of Math., Series 2, t. 94, 1971, p. 139-152 [6.11.1970].

[26] STARK (H. M.). - A transcendence theorem for class-number-problems, I., Annals of Math., Series 2, t. 94, 1971, p. 153-173 [6.11.1970].

[27] SPRINDZUK (V. G.). - Rational approximations to algebraic numbers, Mathematics of the USSR-Izvestija, t. 5, 1971, p. 1003-1019 ; et [en russe] Izv. Akad. Nauk SSSR, Serija Math., t. 35, 1971, p. 991-1007 [31.12.1970].

[28] BAKER (A.) and STARK (H. M.). - On a fundamental inequality in number theory, Annals of Math., Series 2, t. 94, 1971, p. 190-199 [8.1.1971].

[29] FEL'DMAN (N. I.). - An effective refinement of the exponent in Liouville's theorem, Mathematics of the USSR-Izvestija, t. 5, 1971, p. 985-1002 ; et [en russe] Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., t. 35, 1971, p. 973-990 [18.2.1971].

[30] BAKER (A.). - A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms, Acta Arithmetica, Warszawa, t. 21, 1972, p. 117-129 [17.4.1971].

[31] STARK (H. M.). - A transcendence theorem for class number problems, II., Annals of Math., Series 2, t. 96, 1972, p. 174-209 [18.8.1971].