

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

ALAIN DURAND

Une nouvelle classification des nombres complexes selon K. Mahler

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1973-1974),
exp. n° G17, p. G1-G6

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A12_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE NOUVELLE CLASSIFICATION DES NOMBRES COMPLEXES

SELON K. MAHLER

par Alain DURAND

Depuis le début de ce siècle, de nombreux auteurs ont proposé diverses classifications de l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes (pour l'histoire de cette question, se reporter par exemple à [1], p. 60-61). Parmi ces dernières figurent celles proposées par MAHLER : la première, désormais classique, date de 1931, et répartit les nombres complexes en quatre classes A, S, T, U (une étude détaillée de cette classification peut être trouvée dans le livre de SCHNEIDER [4]) ; la seconde, qui date de 1971 [3], est celle exposée dans ce papier.

1. Fonction ordre d'un nombre complexe et classification de \mathbb{C} .

Etant donné un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(X) = p_N X^N + \dots + p_0 \text{ avec } p_N \neq 0 ,$$

on note

$$\partial(P) = N , \quad H(P) = \sup_{0 \leq k < N} |p_k| , \quad L(P) = \sum_{0 \leq k < N} |p_k| \quad \text{et} \quad \Lambda(P) = 2^{\partial(P)} L(P) .$$

Pour obtenir une partition de \mathbb{C} , MAHLER associe tout d'abord à chaque élément θ de \mathbb{C} une fonction positive ou nulle non décroissante $O(u|\theta)$ de la variable entière $u \geq 1$, appelée fonction ordre de θ , et définie par

$$O(u|\theta) = \sup \log \left\{ \frac{1}{|P(\theta)|} \right\} ,$$

la borne supérieure étant prise sur l'ensemble fini des polynômes $P(X) \neq 0$ à coefficients entiers rationnels et tels que

$$\Lambda(P) \leq u , \quad P(\theta) \neq 0 .$$

Il définit ensuite une relation de préordre entre ces fonctions de la manière suivante.

Si $a(u) \geq 0$ et $b(u) \geq 0$ sont deux fonctions non décroissantes de $u \geq 1$ pour lesquelles il existe trois entiers positifs c , u_0 et Γ , tels que

$$a(u^c) \geq \Gamma \cdot b(u) \quad \text{pour } u \geq u_0 ,$$

alors on écrit

$$a(u) \gg b(u) \quad \text{ou} \quad b(u) \ll a(u) .$$

Si les relations

$$a(u) \gg b(u) \quad \text{et} \quad b(u) \gg a(u)$$

sont toutes deux vérifiées, on écrit

$$a(u) \succ \prec b(u) .$$

Il est clair que le signe \succ définit une relation de préordre et le signe $\succ \prec$ définit une relation d'équivalence. Si $\theta, \eta \in \underline{\mathbb{C}}$, on écrit enfin :

$$\begin{aligned} \theta \succ \eta & \text{ si } O(u|\theta) \succ O(u|\eta) , \\ \theta \succ \prec \eta & \text{ si } O(u|\theta) \succ \prec O(u|\eta) . \end{aligned}$$

On obtient ainsi une classification de $\underline{\mathbb{C}}$ à partir de la relation d'équivalence $\succ \prec$.

MAHLER obtient alors les résultats suivants :

$O(u|\theta) \succ \prec \log u$ si θ est algébrique, mais non entier d'un corps quadratique imaginaire.

$O(u|\theta) \succ (\log u)^2$ si θ est transcendant.

$O(u|\theta) \succ \prec O(u|\eta)$ si θ, η sont transcendants et algébriquement dépendants sur $\underline{\mathbb{Q}}$.

Dans les paragraphes suivants nous donnerons des démonstrations, d'ailleurs différentes de celles données par MAHLER, de ces résultats.

2. Lemmes auxiliaires.

LEMME 1. - Soient

$$\theta \in \underline{\mathbb{C}} \text{ et } \sigma(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in \underline{\mathbb{R}} \\ 2 & \text{si } \theta \notin \underline{\mathbb{R}} \end{cases} .$$

Soient N, H des entiers positifs. Il existe alors un polynôme $P \in \underline{\mathbb{Z}}[X]$, $P \neq 0$ tel que

$$\partial(P) < N, \quad H(P) \leq H$$

et

$$|P(\theta)| \leq \exp(cN) H^{1-(N+1)/\sigma(\theta)},$$

où $c = c(\theta)$ est une constante positive.

Preuve. - La preuve de ce lemme repose sur le principe des tiroirs de Dirichlet.

On considère les $(H+1)^{N+1}$ nombres (distincts ou non)

$$\sum_{0 \leq k \leq N} x_k \theta^k, \quad x_k \in \underline{\mathbb{Z}}, \quad 0 \leq x_k \leq H \quad (k = 0, \dots, N) .$$

1° θ est réel. - Puisque $x_k \geq 0$ ($k = 0, \dots, N$), ces nombres sont dans un intervalle $I \subset \underline{\mathbb{R}}$ de longueur $(N+1)(\theta^*)^N H$ (où $\theta^* = \sup\{1, |\theta|\}$). Soit $n = (H+1)^{N+1} - 1$. Divisons alors l'intervalle I en n sous-intervalles de longueur $(N+1)(\theta^*)^N (H/n)$. Deux de ces nombres, disons y, y' , sont par suite dans le même sous-intervalle ; leur différence

$$y - y' = \sum_{k=0}^N (x_k - x'_k) \theta^k$$

vérifie par conséquent

$$|y - y'| \leq \frac{(N+1)(\theta^*)^N H}{n} \leq (N+1)(\theta^*)^N H^{-N} \leq \exp(cN) H^{-N}.$$

2° θ n'est pas réel. - Les nombres précédents sont ici dans un carré $C \subset \underline{C}$ de côté $2(N+1)(\theta^*)^N H$. Soit $n \in \underline{N}$ tel que $n < (H+1)^{(N+1)/2} \leq n+1$. Divisons alors le carré C en n^2 carrés égaux de côté $(N+1)(\theta^*)^N (H/n)$. Il existe donc deux nombres y et y' tels que la différence

$$y - y' = \sum_{0 \leq k \leq N} (x_k - x'_k) \theta^k$$

vérifie

$$|y - y'| \leq \sqrt{2(N+1)} (\theta^*)^N (H/n) \leq \sqrt{2(N+1)} (\theta^*)^N H^{-((N-1)/2)} \leq \exp(cN) H^{-((N-1)/2)}.$$

LEMME 2. - Soient $P_{ij}(X)$, $1 \leq i, j \leq n$, des polynômes à coefficients complexes, et soit $\Delta = \Delta(X)$ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ P_{n1} & \dots & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

Alors

$$(1) \quad \partial(\Delta) \leq \sum_{1 \leq j \leq n} \sup_{1 \leq i \leq n} \partial(P_{ij}),$$

$$(2) \quad L(\Delta) \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{1 \leq i \leq n} L(P_{ij}) \right).$$

Preuve. - La relation (1) est triviale. Pour démontrer la relation (2), on raisonne par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant évident.

On développe Δ suivant la première colonne. On obtient :

$$\Delta = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} P_{k1} Q_k$$

où, par hypothèse de récurrence, Q_k vérifie

$$L(Q_k) \leq \prod_{\substack{j=2 \\ i \neq k}}^n \left(\sum_{i=1}^n L(P_{ij}) \right) \leq \prod_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^n L(P_{ij}) \right) \quad (1 \leq k \leq n).$$

On en déduit

$$L(\Delta) \leq \sum_{k=1}^n L(P_{k1}) L(Q_k) \leq \sup_{1 \leq k \leq n} L(Q_k) \sum_{k=1}^n L(P_{k1}) \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{1 \leq i \leq n} L(P_{ij}) \right).$$

LEMME 3. - Soient θ, η des nombres complexes tels que η soit algébrique sur le corps $\mathbb{Q}(\theta)$. Il existe alors deux entiers positifs $k_i = k_i(\theta, \eta)$ ($i = 1, 2$) tels que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$, on ait :

$$Q(\eta) = 0,$$

ou

$$|Q(\eta)| > \Lambda(Q)^{-k_1} \exp(-O(\Lambda(Q)^{k_2} |\theta|)).$$

$$|R(P_1, Q_1)| \leq p |Q(\eta)| \left(\sum_{k=0}^p |a_k(\theta)| \right)^q L(Q)^{p-1}.$$

(b) On suppose maintenant $|\eta| > 1$. Dans ce cas, on multiplie la i -ième ligne de $R(P_1, Q)$ par η^{-i+1} , et on ajoute le résultat obtenu à la première ligne. On obtient donc sur la première ligne :

$$\eta^{-p} P_1(\eta), \quad \eta^{-p-1} P_1(\eta), \dots, \eta_1^{-p-q+1} P_1(\eta), \quad \eta^{-q} Q(\eta), \dots, \eta^{-q-p+1} Q(\eta),$$

et en développant le déterminant suivant cette ligne, on parvient à la même inégalité que précédemment.

Dans les deux cas, on obtient donc

$$|R(P_1, Q_1)| \leq |Q(\eta)| \cdot c_3^q L(Q)^{p-1} \leq |Q(\eta)| \Lambda(Q)^{k_1}.$$

3° Conclusion. - En comparant les résultats obtenus au 1° et au 2°, on obtient ainsi la relation :

$$|Q(\eta)| \geq \Lambda(Q)^{-k_1} \exp(-O(\Lambda(Q)^{k_2} |\theta|)).$$

3. Propriétés de la fonction ordre d'un nombre complexe.

Les propriétés démontrées ici sont celles énoncées dans le §1.

PROPOSITION 1. - Pour tout $\eta \in \mathbb{C}$ algébrique, on a

$$O(u|\eta) \ll \log u.$$

Preuve. - Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\eta) \neq 0$. On utilise le lemme 3 avec $\theta = 1$. Il existe donc un entier positif $k = k(\eta)$ tel que

$$|P(\eta)| \geq \Lambda(P)^{-k}$$

(il est facile de voir que $O(u|1) = 0$). D'où :

$$O(u|\eta) < k \log u.$$

PROPOSITION 2. - Si $\theta \in \mathbb{C}$ est algébrique, mais n'est pas un élément d'un corps quadratique imaginaire, alors

$$O(u|\theta) \gg \log u.$$

Preuve. - Soient $u \in \mathbb{N}$, $u \geq 2^{\sigma(\theta)+1}$, et $H = [u/4^{\sigma(\theta)}]$ (où $\sigma(\theta)$ est défini dans l'énoncé du lemme 1). On applique le lemme 1 avec $N = \sigma(\theta)$. Il existe alors un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(X) \neq 0$ vérifiant $\partial(P) \leq \sigma(\theta)$, $H(P) \leq H$, d'où $\Lambda(P) < u$ et tel que

$$|P(\theta)| < \exp(c\sigma(\theta)) H^{-(1/\sigma(\theta))},$$

où $c = c(\theta)$ est une constante positive. Comme l'hypothèse faite sur θ équivaut à dire que θ est de degré $> \sigma(\theta)$, on a donc $P(\theta) \neq 0$. Pour u assez grand, il vient par conséquent :

$$O(u|\theta) > \frac{1}{2\sigma(\theta)} \log u.$$

Remarque. - Le résultat précédent reste vrai si θ est un élément d'un corps quadratique imaginaire, mais non entier algébrique. Par contre, il n'est trivial que si θ est un entier d'un tel corps, en particulier si $\theta \in \underline{\mathbb{Z}}$, alors on a :

$$o(u|\theta) = 0 .$$

PROPOSITION 3. - Si $\theta \in \underline{\mathbb{C}}$ est transcendant, alors

$$o(u|\theta) \gg (\log u)^2 .$$

Preuve. - Soit $u \in \underline{\mathbb{N}}$, $u \geq 16$. On applique le lemme 1 avec $N = [\log \sqrt{u}/\log 4]$ et $H = [\sqrt{u}]$. Pour u assez grand, on obtient alors

$$o(u|\theta) \geq \frac{1}{9\sigma(\theta)} (\log u)^2 .$$

PROPOSITION 4. - Si θ et $\eta \in \underline{\mathbb{C}}$ sont transcendants et algébriquement dépendants, alors :

$$o(u|\theta) > < o(u|\eta) .$$

Preuve. - Soit $Q \in \underline{\mathbb{Z}[X]}$ tel que $Q(\eta) \neq 0$. Comme η est algébrique sur $\underline{\mathbb{Q}(\theta)}$, il existe donc d'après le lemme 3, deux entiers positifs $k_i = k_i(\theta, \eta)$ ($i = 1, 2$) tels que

$$|Q(\eta)| > \Lambda(Q)^{-k_1} \exp(-o(\Lambda(Q)^{k_2}|\theta)) .$$

Comme d'après la proposition 3 on a

$$o(u|\theta) \gg (\log u)^2 ,$$

on en déduit donc

$$o(u|\eta) \ll o(u|\theta) .$$

D'une manière analogue, on a

$$o(u|\theta) \ll o(u|\eta) ,$$

d'où la relation

$$o(u|\theta) > < o(u|\eta) .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FEL'DMAN (N. I.) and SHIDLOVSKII (A. B.). - The development and present state of the theory of transcendental numbers, Russian math. Surveys, t. 22, 1967, p. 1-79 ; [en russe] Uspekhi Mat. Nauk SSSR, t. 22, 1967, p. 3-82.
- [2] LANG (S.). - Algebra. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1965 (Addison-Wesley Series in Mathematics).
- [3] MAHLER (K.). - On the order function of a transcendental number, Acta Arithm., Warszawa, t. 18, 1971, p. 63-76.
- [4] SCHNEIDER (T.). - Einführung in die transzendenten Zahlen. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 81).