

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JACQUES VÉLU

**Fonctions L - p -adiques associées aux formes modulaires
paraboliques de $SL_2(\mathbb{Z})$**

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1973-1974),
exp. n° 11, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A8_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS L p-ADIQUES
ASSOCIEES AUX FORMES MODULAIRES PARABOLIQUES DE $SL_2(\mathbb{Z})$

par Jacques VELU

Dans cet exposé, je vais résumer la seconde partie de l'article de MANIN [4], auquel a été consacré le séminaire Serre du Collège de France [2].

1. Introduction.

Soit $\varphi(z) = \sum_1^\infty a_n \exp 2\pi i n z$ une forme modulaire parabolique pour $SL_2(\mathbb{Z})$ de poids $w + 2$ (w est pair, ≥ 10). La transformée de Mellin de φ est la fonction entière, définie par

$$\Lambda_\varphi(s) = \int_0^\infty y^s \varphi(iy) \frac{dy}{y} = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} \right).$$

Cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda_\varphi(w + 2 - s) = (-1)^{w/2} \Lambda_\varphi(s).$$

Si l'on récrit l'intégrale sous la forme

$$\Lambda_\varphi(s) = \int_{\mathbb{R}_{\text{pos}}^\times} \chi^{(s)}(y) \mu_\varphi(y)$$

où

$$\begin{cases} \mathbb{R}_{\text{pos}}^\times & \text{est le groupe multiplicatif des réels positifs,} \\ \chi^{(s)} & \text{est le quasi-caractère défini par } \chi^{(s)}(y) = y^s, \\ \mu_\varphi(y) & \text{est la mesure } \varphi(iy) \frac{dy}{y}. \end{cases}$$

On peut interpréter $\Lambda_\varphi(s)$ comme une fonction analytique sur l'ensemble des quasi-caractères du groupe $\mathbb{R}_{\text{pos}}^\times$, et ce que l'on va faire c'est construire un analogue p-adique de cette fonction au moyen d'une intégrale p-adique.

2. Analogie de $\mathbb{R}_{\text{pos}}^\times$.

On pourrait prendre $\mathbb{Z}_p^\times$, mais

$$\mathbb{Z}_p^\times \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \times (1 + q\mathbb{Z}_p)^\times \quad \text{où } q = \begin{cases} p & \text{si } p \neq 2 \\ u & \text{si } p = 2 \end{cases}.$$

Pour avoir plus de généralité, on fixe un entier Δ_0 premier à p , on pose $\Delta = \Delta_0 q$, et on définit

$$\mathbb{Z}_\Delta = \varprojlim (\mathbb{Z}/\Delta p^n \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\Delta_0 \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p.$$

L'analogie de $\mathbb{R}_{\text{pos}}^\times$ est le groupe $\mathbb{Z}_\Delta^\times \simeq (\mathbb{Z}/\Delta \mathbb{Z})^\times \times (1 + q\mathbb{Z}_p)^\times$.

Notons $U_p = (1 + q\mathbb{Z}_p)^\times$. Ce groupe est isomorphe, mais non canoniquement, à $\mathbb{Z}_p^\times$. En effet, si $\gamma \in U_p$ est tel que $v(\gamma - 1) = v(q)$, ou encore $\gamma \equiv 1 (q)$, tout

élément z de U_p s'écrit de façon unique $z = \gamma^a$ avec $a \in \mathbb{Z}_p$ (γ^a signifie $\exp(a \log \gamma)$).

3. Analogue de $\chi^{(s)}$

Soit $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$; soient $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers et $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$, et fixons un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$. Posons

$$X(\mathbb{Z}_\Delta^\times) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\mathbb{Z}_\Delta^\times, \mathbb{C}_p^\times).$$

Alors

$$X(\mathbb{Z}_\Delta^\times) \simeq X((\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^\times) \times X(U_p),$$

tout caractère χ s'écrit de façon unique sous la forme $\chi = \chi_0 \chi_1$, où

$\chi_0 \in X((\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^\times)$ est sa composante modérée,

$\chi_1 \in X(U_p)$ est sa composante sauvage.

Le groupe $X(U_p)$ est isomorphe, mais non canoniquement, au groupe $T = (1 + \mathfrak{m})^\times$. En effet, l'application $L_\gamma : X(U_p) \rightarrow T$, définie par $\chi \mapsto \chi(\gamma)$ (γ étant choisi tel que $v(\gamma - 1) = v(q)$) est un isomorphisme. Si $\chi_u = L_\gamma^{-1}(u)$, on a $\chi_u(\gamma^a) = u^a$ pour $\gamma^a \in U_p$.

Les caractères χ_u , qui sont d'ordre fini, sont ceux pour lesquels u est une racine p^n -ième de 1. Ce sont les fonctions localement constantes sur U_p .

Tout caractère de Dirichlet, dont le conducteur est une puissance de p , peut s'identifier à un caractère d'ordre fini sur U_p au moyen du plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$.

L'isomorphisme entre $X(U_p)$ et T fournit une structure d'espace analytique sur $X(U_p)$ avec, pour seule carte $X(U_p)$, tout entier. Pourtant, on peut aussi bien donner à $X(U_p)$ cette structure d'espace analytique avec des cartes plus petites en procédant comme dans le cas réel. En effet, si $s \in \mathcal{O}$ (anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$), l'application $\chi^{(s)} : U_p \rightarrow \mathbb{C}_p^\times$, définie par $\chi^{(s)}(z) = z^s$, est un caractère, et avec nos notations, $\chi^{(s)} = \chi_{\gamma^s}$. Ce paramétrage applique $\mathcal{O}$ sur un voisinage de l'élément neutre de $X(U_p)$ qui ne contient pas de caractère d'ordre fini.

4. Analogue des mesures.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{Z}_\Delta^\times$ localement constantes. Par définition, une distribution est une forme $\mathbb{C}_p$ -linéaire sur $\mathcal{S}$. Cet espace vectoriel admet pour base les caractères d'ordre fini, et pour générateurs les fonctions caractéristiques des compacts $K_{a,n}$, où $a \in \mathbb{Z}_\Delta^\times$, $n \geq 0$, et

$$K_{a,n} = \{z \in \mathbb{Z}_\Delta^\times ; z \equiv a \pmod{\Delta p^n}\}.$$

Par conséquent, on peut aussi bien considérer une distribution comme une fonction sur les caractères d'ordre fini, sur le sous-groupe de torsion de T , ou comme une

fonction additive sur les compacts, i. e. telle que

$$(K_1 \cap K_2 = \emptyset) \implies (\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)) .$$

Exemple de distribution : La "distribution de Haar" est définie par $\mu(K_{a,n}) = \frac{1}{p^n}$. On remarque qu'ici $1/p^n \in \mathbb{C}_p$ et non à $\mathbb{C}$ comme dans le cas classique. Par conséquent, si $n \rightarrow \infty$, i. e. si le compact $K_{a,n}$ tend vers le point a , on a $\mu(K_{a,n}) \rightarrow 0$ et non vers ∞ . Il en résulte que la méthode consistant à étendre μ aux fonctions continues en les approchant par des fonctions localement constantes (fonctions en escalier) va connaître quelques difficultés.

Définition. - La distribution μ est à croissance lente si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{a \in \mathbb{Z}_\Delta^\times} \frac{|\mu(K_{a,n})|}{p^n} \right) = 0 .$$

En quelque sorte, une distribution à croissance lente est une distribution qui croît moins vite que la distribution de Haar.

5. Analogie de l'intégrale.

Soit $f : \mathbb{Z}_\Delta^\times \rightarrow \mathbb{C}_p$, et soit $\mathcal{R}_n$ un système de représentants dans $\mathbb{Z}_\Delta^\times$ de $(\mathbb{Z}_\Delta / \Delta p^n \mathbb{Z}_\Delta)^\times$; μ étant une distribution, définissons les sommes de Riemann par

$$S(f, \mathcal{R}_n) = \sum_{b \in \mathcal{R}_n} f(b) \mu(K_{b,n}) .$$

Nous avons alors le théorème suivant.

THEOREME. - Si μ est à croissance lente et si f est une fonction lipschitzienne, i. e. s'il existe $c(f)$ telle que

$$(b \equiv b' \pmod{\Delta p^n}) \implies (|f(b) - f(b')| < \frac{c(f)}{p^n}) ,$$

l'ensemble des $S(f, \mathcal{R}_n)$ possède un point d'accumulation unique dans $\mathbb{C}_p$. On le note $\int_{\mathbb{Z}_\Delta^\times} f \mu$.

Remarquons que toute $\chi \in X(\mathbb{Z}_\Delta^\times)$ est lipschitzienne, par conséquent, si nous fixons χ_0 et faisons varier χ_1 , la mesure μ permet de définir une fonction sur T par

$$G_{\mu, \chi_0}^{(\chi)}(u) = \int_{\mathbb{Z}_\Delta^\times} \chi_0 \chi_u \mu .$$

THEOREME. - La fonction ainsi définie est analytique sur T ⁽¹⁾.

6. Construction des distributions.

On adopte le point de vue distribution = fonction additive sur les $K_{a,n}$.

Le théorème suivant permet de construire de telles fonctions.

⁽¹⁾ On sait depuis que cet exposé a été fait que la fonction analytique appartient à l'ensemble des fonctions $o(\log)$ [1], et que, réciproquement, toute fonction $o(\log)$ est construite ainsi à partir d'une distribution à croissance lente.

THEOREME (NASSIBOULIN). - Soit $R : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}_p$ telle que

$$\sum_{i=0}^{p-1} R\left(\frac{x+i}{p}\right) = A_0 R(x) + A_1 R(px) + \dots + A_n R(p^n x), \quad \forall x,$$

et soit λ une racine de l'équation

$$X^{n+1} = A_0 X^n + pA_1 X^{n-1} + \dots + p^n A_n.$$

Si l'on pose

$$B_0(m) = \frac{1}{\lambda^m},$$

$$B_1(m) = \frac{1}{\lambda^{m+1}} \left[A_1 + \frac{p}{\lambda} A_2 + \frac{p^2}{\lambda^2} A_3 + \dots + \frac{p^{n-1}}{\lambda^{n-1}} A_n \right],$$

$$B_2(m) = \frac{1}{\lambda^{m+1}} \left[A_2 + \frac{p}{\lambda} A_3 + \dots + \frac{p^{n-2}}{\lambda^{n-2}} A_n \right],$$

...

$$B_n(m) = \frac{1}{\lambda^{m+1}} A_n;$$

alors μ définie par

$$\mu(K_{a,n}) = B_0(m) R\left(\frac{a}{\Delta p^m}\right) + B_1(m) \left(\frac{a}{\Delta p^{m-1}}\right) + \dots + B_n(m) \left(\frac{a}{\Delta p^{m-n}}\right)$$

est une distribution.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de vérifier que

$$\mu(K_{a,m}) = \sum_{b \equiv a(\Delta p^m), b \bmod \Delta p^{m+1}} \mu(K_{b,m+1}).$$

7. Distributions associées aux formes modulaires.

Dans la première partie de son article ⁽²⁾, MANIN étudie les intégrales

$$\int_{\mathbb{X}}^{i\infty} \varphi(z) dz,$$

dans le cas où φ est une série de Hecke, i. e. $\varphi|T_n = \lambda_n \varphi$ pour tout n , et $\varphi(z) = \sum_1^\infty \lambda_n \exp 2\pi i n z$. Il démontre qu'il existe ω_+ et $\omega_- \in \mathbb{C}$ tels que

$$Q_{(x)}^+ = \frac{1}{\omega_+} \operatorname{Im} \int_{\mathbb{X}}^\infty \varphi(z) dz, \quad Q_{(x)}^- = \frac{1}{\omega_-} \operatorname{Re} \int_{\mathbb{X}}^\infty \varphi(z) dz$$

sont des fonctions définies sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ prenant leurs valeurs dans les entiers du corps de nombres réel $\mathbb{Q}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots)$. De plus on a

$$\lambda_p Q_{(x)}^\pm = p^w Q_{(px)}^\pm + \sum_{k=0}^{p-1} Q_{\left(\frac{x+i}{p}\right)}^\pm.$$

Grâce au théorème de Nassiboulin, on construit quatre mesures en posant

$$\mu_{\varphi, \lambda}^\pm(K_{a,n}) = \lambda^{-m} Q_{\left(\frac{a}{\Delta p^m}\right)}^\pm + p^w \lambda^{-(m+1)} Q_{\left(\frac{a}{\Delta p^{m-1}}\right)}^\pm$$

avec λ racine de l'équation $X^2 - \lambda_p X + p^{w+1} = 0$.

Si $v(\lambda_p) < 1$, une des racines vérifie $v(\lambda) < 1$, et les deux distributions

⁽²⁾ Dans son deuxième article [3], MANIN étudie les fonctions $Q_k(x) = \int_{\mathbb{X}}^{1\infty} (z-x)^k \varphi(z) dz$, où $0 \leq k \leq w$, ce qui permet de démontrer l'équation fonctionnelle de la fonction A p-adique.

correspondantes sont à croissance lente.

Par conséquent, on peut définir $\int_{\mathbb{Z}_{\Delta}^k} \chi \mu_{\varphi}^{\pm}$.

Le lien avec les intégrales archimédiennes correspondantes est donné par le théorème suivant :

THÉOREME. - Soit χ un caractère de Dirichlet, de conducteur Δp^n , posons

$$\varphi_x(z) = \sum_1^{\infty} \lambda_n \chi(n) \exp 2\pi i n z,$$

$$G(\chi) = \sum_{x \bmod \Delta p^n} \chi(x) \exp(2\pi i x / \Delta p^n) \quad \text{la somme de Gauss,}$$

$$\chi^*(x) = \chi^{-1}(-x),$$

et identifions χ à un élément de $X(\mathbb{Z}_{\Delta}^{\times})$. Nous avons la relation

$$\frac{\Delta p^n}{\omega_{\chi}(-1) G(\chi)} \int_0^{\infty} \varphi_{\chi}(z) dz = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{Z}_{\Delta}^{\times}} \chi^* \mu_{\varphi}^{\chi(-1)} = \sum_{a \bmod \Delta p^n} \chi^*(a) Q^{\chi(-1)}\left(\frac{a}{\Delta p^n}\right).$$

Remarque. - Cette dernière formule est en réalité le point de départ de la construction de la fonction Λ p-adique. Depuis que cet exposé a été fait, Ju. I. MANIN [3], Y. AMICE et J. VELU [1] ont amélioré ces résultats, et démontré, d'une part que la fonction p-adique construite satisfait une équation fonctionnelle comparable à celle de la fonction Λ archimédienne, d'autre part qu'on peut définir cette fonction en remplaçant la condition $v(\lambda) < 1$ par $v(\lambda) < w + 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.) et VELU (J.). - Fonctions L p-adiques associées aux séries de Hecke, Journées arithmétiques [1974. Bordeaux] (à paraître).
- [2] LIGOZAT (G.) et VELU (J.). - Séminaire Serre : Fonctions modulaires, 1973/74, Collège de France.
- [3] MANIN (Ju. I.). - Détermination des valeurs des séries de Hecke p-adiques aux points entiers de la bande critique [en russe], t. 93, (135), 1974, n° 4.
- [4] MANIN (Ju. I.). - Périodes des formes paraboliques et séries de Hecke p-adiques [en russe], Mat. Sbornik, t. 92 (134), 1973, p. 378-401.

(Texte reçu le 12 juin 1974)

Jacques VELU
3 résidence du Parc
91120 PALAISEAU