

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL MENDÈS FRANCE

Les ensembles de Bésineau

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1973-1974),
exp. n° 7, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A5_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES ENSEMBLES DE BÉSINEAU

par Michel MENDES FRANCL

1. Deux problèmes ouverts.

Soit $\theta > 1$ un nombre réel donné. On dit que le nombre réel x est normal pour la base θ si la suite $(x\theta^n)$ est équirépartie modulo 1. Notons par $B(\theta)$ l'ensemble des nombres normaux pour la base θ . Le résultat suivant est bien connu, quoique non trivial : Si $\theta \geq 2$ est un entier rationnel et si $x \in B(\theta)$, alors, pour tout nombre rationnel $\alpha \neq 0$, $\alpha x \in B(\theta)$ (voir [8], ou le paragraphe 5 de cet exposé).

Une des étapes de la démonstration consiste à montrer cette autre propriété : Soient $\theta' \geq 2$ et $\theta'' \geq 2$ deux nombres entiers. Alors

$$B(\theta') = B(\theta'') \iff \frac{\log \theta'}{\log \theta''} \in \mathbb{Q}$$

(voir [11], par exemple).

Les deux propriétés précédentes suggèrent les problèmes suivants :

PROBLÈME 1. - $\theta > 1$ étant un nombre réel donné, est-il vrai que, pour tout nombre rationnel $\alpha \neq 0$, on ait

$$x \in B(\theta) \Rightarrow \alpha x \in B(\theta) ?$$

PROBLÈME 2. - $\theta' > 1$ et $\theta'' > 1$ étant deux nombres réels donnés, est-il vrai que

$$B(\theta') = B(\theta'') \iff \frac{\log \theta'}{\log \theta''} \in \mathbb{Q} ?$$

A ma connaissance, nulle réponse n'a été donnée ni au premier ni au second problème. Une conjecture (gratuite au sens d'ERDÖS) est que la réponse à l'un et à l'autre des problèmes est affirmative, à condition d'imposer aux nombres θ , θ' et θ'' d'être des nombres de Pisot-Vijayaraghavan. Le problème 2 a été étudié dans un cadre assez différent (automorphismes de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$) par différents auteurs, entre autres C. BATUT [1], J. W. S. CASSELS [3], J. CIGLER [4], W. SCHMIDT [11], [12] et K. SIGMUND [13], [14].

Une version affaiblie du problème 2 est la suivante : Est-il vrai que

$$(x\theta^n) \text{ équirépartie (mod 1)} \iff \forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, (x\theta^{an+b})$$

est équirépartie (mod 1) ?

L'étude de cette question nous amène très naturellement à caractériser les suites $u = (u_n)$ qui sont telles que, pour tout entier $a \geq 1$ et tout entier $b \geq 0$, la suite (u_{an+b}) est équirépartie modulo 1. Tel est l'objet essentiel de cet exposé.

2. Les espaces de Marcinkiewicz et de Besicovitch.

L'étude qui suit est un pot pourri des principaux résultats obtenus par J. BÉSI-NEAU [2] d'une part, et par H. DABOUSSI et M. MENDES FRANCE [5] d'autre part.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des suites $f = (f_n) \in \underline{\mathbb{C}}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$(1) \quad \|f\| = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f_n| < \infty,$$

et soit $\mathcal{M}$ l'espace quotient de $\mathcal{E}$ par l'ensemble des suites f vérifiant $\|f\| = 0$. La relation (1) induit sur $\mathcal{M}$ une norme qui fait de $\mathcal{M}$ un espace de Banach, connu sous le nom d'espace de Marcinkiewicz. Dans la suite, on identifiera tout élément de $\mathcal{E}$ à sa classe dans $\mathcal{M}$.

Voyons quelques exemples de sous-espaces fermés. Un polynôme trigonométrique p est une combinaison finie d'exponentielles complexes :

$$n \mapsto p_n = \sum_{\nu} c_{\nu} e(-\alpha_{\nu} n),$$

où $c_{\nu} \in \underline{\mathbb{C}}$, $\alpha_{\nu} \in \underline{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$, $e(x) = \exp 2\pi i x$, et où la somme ne contient qu'un nombre fini de termes. Il est bien clair que $p \in \mathcal{M}$ ($\|p\| \leq \sum_{\nu} |c_{\nu}|$). Appelons fréquences de p les nombres α_{ν} . Soit $A \subset \underline{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$. On désigne par $\mathcal{B}(A)$ l'adhérence dans $\mathcal{M}$ de l'ensemble des polynômes trigonométriques à fréquences dans A . $\mathcal{B}(\underline{\mathbb{R}/\mathbb{Z}})$ n'est autre que l'ensemble des suites presque-périodiques au sens de Besicovitch, et $\mathcal{B}(\underline{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}) \supset \mathcal{B}(A)$.

Soit $s = (s_n)$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. Soit χ_s sa fonction caractéristique :

$$\chi_s(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in s \\ 0 & \text{si } k \notin s. \end{cases}$$

On dit que s est une Λ -suite si $\chi_s \in \mathcal{B}(A)$ et si $\|\chi_s\| > 0$. Donnons en quelques exemples :

- (i) $s = (an + b)$, $a \geq 1$, $b \geq 0$ entiers ; $A = \underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$;
- (ii) $s = ([\alpha n])$, $\alpha > 1$ réel ; $A = \underline{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$;
- (iii) la suite des entiers quadratfrei.

3. Le spectre d'une suite et les ensembles de Bésineau.

Soit $u = (u_n)$ une suite infinie de nombres réels réduits modulo 1. On appelle spectre de u , noté $\text{sp}(u)$, l'ensemble des $\alpha \in \underline{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ tels que la suite $(u_n - n\alpha)$ ne soit pas équirépartie modulo 1.

Si A est un sous-ensemble du tore, on désignera son complémentaire par $\tilde{A}$. Un sous-ensemble S du tore est appelé ensemble de Bésineau si les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{sp}(u) \subset S$;
- (ii) pour toute $\tilde{S}$ -suite s , la suite $u \circ s = (u_{s_n})$ est équirépartie modulo 1.

L'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble de Bésineau [10] et de même $(\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}})^{\sim}$ [2], [10], de sorte qu'en particulier

$\text{sp}(u) \cap (\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}) = \emptyset \iff$ pour toute $(\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}})$ -suite s , la suite $u \cdot s$ est équirépartie (mod 1).

Or $\mathcal{B}(\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}})$ n'est autre que l'ensemble des fonctions limite-périodiques, d'où on déduit le théorème suivant.

THÉOREME. - Une condition nécessaire et suffisante pour que les suites (u_{an+b}) soient équiréparties modulo 1, pour tous entiers $a \geq 1$ et $b \geq 0$, est que

$$\text{sp}(u) \cap (\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}) = \emptyset.$$

Ce résultat répond de façon très précise au problème posé à la fin du premier paragraphe. Bien entendu cela ne résout pas les problèmes 1 et 2. Tout au plus, il permet de reposer le problème 2 (ou plutôt sa version affaiblie) sous la forme équivalente : Est-il vrai que

$$\text{sp}((x\theta^n)) \neq \emptyset \iff \text{sp}((x\theta^n)) \cap (\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}) = \emptyset ?$$

(l'implication de la droite vers la gauche est triviale).

4. Appendice 1 : Les suites additives.

On rappelle qu'une suite $u = (u_n)$ est dite additive si

$$u_{mn} = u_m + u_n$$

sitôt que $(m, n) = 1$. Faisant usage de certains résultats de DELANGE [6], [7], on peut montrer que si u est additif, alors

$$\text{sp}(u) \cap (\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}) = \emptyset \iff u \text{ est équirépartie (mod 1).}$$

D'après ce qui précède, on en déduit donc que si u est une suite additive équirépartie modulo 1, alors toutes ses sous-suites $u \cdot s$, où s est une $(\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}})$ -suite, sont équiréparties modulo 1. Ce résultat est à comparer avec le théorème 2 de DELANGE [7].

5. Appendice 2 : Une démonstration.

Dans ce paragraphe, nous reproduisons une démonstration, due à J. E. MAXFIELD [8], du résultat suivant : Soit $\theta \geq 2$ un entier, et soit α un nombre rationnel non nul. Alors $x \in B(\theta) \implies \alpha x \in B(\theta)$.

D'une façon générale, si la suite (u_n) est équirépartie modulo 1, alors, $k \neq 0$ étant un entier arbitraire, la suite (ku_n) est équirépartie modulo 1. Il suffit donc de supposer que $\alpha = 1/q$, où $q \in \mathbb{N}$. Le cas où q est une puissance de θ est aussi trivial. Compte tenu de ces remarques, on pourra donc supposer que $\alpha = \frac{1}{q}$, où $(q, \theta) = 1$.

Soit alors $x \in B(\theta)$. La suite $(x\theta^n)$ est donc équirépartie modulo 1 et, par suite, pour tout entier $a \geq 1$, $(x\theta^{an})$ est équirépartie modulo 1 (cela découle

de la seconde propriété énoncée au premier paragraphe). Soit s un entier ≥ 1 arbitraire. Le nombre $(\theta^{as} - 1)(\theta^a - 1)^{-1}$ est entier, non nul donc

$$\left(x \frac{\theta^{as} - 1}{\theta^a - 1} \theta^{an}\right)$$

est équirépartie modulo 1. En d'autres termes, pour tout entier $s \geq 1$, la suite

$$\left(\frac{x}{\theta^a - 1} \theta^{a(n+s)} - \frac{x}{\theta^a - 1} \theta^{an}\right)$$

est équirépartie modulo 1. Le théorème de Van der Corput implique alors l'équirépartition modulo 1 de la suite

$$\left(\frac{x}{\theta^a - 1} \theta^{an}\right)$$

donc celle de

$$\left(\frac{x}{\theta^a - 1} \theta^n\right).$$

Enfin, choisissant $a = \varphi(q)$ (indicatrice d'Euler), on conclut à l'équirépartition de la suite $\left(\frac{x}{q} \theta^n\right)$.

C. Q. F. D.

6. Exercices et problèmes ouverts.

(Un astérisque (*) signifie que le problème est ouvert.)

1. Montrer que, pour presque tout $\theta > 1$, on a

$$\forall x \in B(\theta), \forall \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad \alpha x \in B(\theta).$$

2. Soit $\theta \geq 2$ un nombre entier. Montrer que

$$\forall x \in B(\theta), \forall \alpha \in \mathbb{Q}, \quad x + \alpha \in B(\theta).$$

3*. Soit $\theta \geq 2$ un nombre entier. Etudier l'ensemble $\underline{A}$ des nombres réels tels que

$$\forall x \in B(\theta), \forall \alpha \in \underline{A}, \quad x + \alpha \in B(\theta)..$$

(On pourra consulter à ce propos l'article de J. E. MAXFIELD et J. L. SPEARS [9]).

4*. Soit $\theta > 1$ un nombre algébrique et $\mathbb{Q}(\theta)$ le corps engendré par θ . Est-il vrai que

$$x \in B(\theta), \alpha \in \mathbb{Q}(\theta) \setminus \{0\} \Rightarrow \alpha x \in B(\theta) ?$$

Si la réponse est positive, et si $\theta > 2$ est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan, alors l'ensemble de Cantor $C(\theta)$, construit sur $[0, 1]$, à dissection θ^{-1} , est disjoint de $B(\theta)$.

5. Montrer que, pour toute suite $u = (u_n)$, l'ensemble $\text{sp}(u)$ est de mesure nulle, et même de dimension de Hausdorff nulle (voir H. WALLIN [15]). Montrer que $\text{sp}(u)$ peut être non dénombrable.

6*. Est-il vrai que $\text{sp}((x\theta^n))$ ($x \neq 0$, $\theta > 1$) est au plus dénombrable ?

7. Soit $u = (u_n)$ une suite g -additive, c'est-à-dire vérifiant la condition suivante :

$$u_{ag^r+b} = u_{ag^r} + u_b$$

pour tous entiers a , b , r tels que $a \geq 0$, $r \geq 0$, $0 \leq b \leq g^r - 1$,

Montrer que, ou bien $\text{sp}(u) = \emptyset$, ou bien il existe $\alpha \in \underline{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ pour lequel

$$\text{sp}(u) = \alpha + (\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}})$$

(voir [5]).

8*. Etudier $\text{sp}(u)$ quand u est une fonction multiplicative.

9. Montrer que, pour presque tout u , $\text{sp}(u) = \emptyset$.

10. Soit $u = (u_n)$ l'une des suites, définie par $u_n = \sqrt{2} n^2$, $u_n = (\log n)^2$, $u_n = \sqrt{n}$, $u_n = n \log n$. Montrer que $\text{sp}(u) = \emptyset$.

11. La suite $u = (u_n)$ étant donnée, on note par $B(u)$ l'ensemble des x tels que $xu = (xu_n)$ est équirépartie modulo 1. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des $(\underline{\mathbb{R}/\mathbb{Z}})$ -suites, c'est-à-dire l'ensemble des suites croissantes d'entiers, dont les fonctions caractéristiques sont presque-périodiques. Etablir l'égalité

$$\bigcap_{\alpha \in \underline{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}} B(u - \alpha \underline{N}) = \bigcap_{s \in \mathcal{C}} B(u \circ s),$$

(voir [5]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BATUT (C.). - Séminaire (mod 1), Université de Bordeaux (non rédigé).
- [2] BÉSINEAU (J.). - Presque-périodicité et sous-suites, C. R. Acad. Sc. Paris (à paraître).
- [3] CASSELS (J. W. S.). - On a problem of Steinhaus about normal numbers, Colloq. Math., Wroclaw, t. 7, 1959, p. 95-101.
- [4] CIGLER (J.). - Ein gruppentheoretisches Analogon zum Begriff der normalen Zahl, J. für reine und angew. Math., t. 206, 1961, p. 5-8.
- [5] DABOUSSI (H.) and MENDES FRANCE (M.). - Spectrum, almost-periodicity and equidistribution modulo 1, Periodica Mathematica Hungarica (à paraître).
- [6] DELANGE (H.). - On the distribution modulo 1 of additive functions, J. of Indian math. Soc., t. 34, 1970, p. 215-235.
- [7] DELANGE (H.). - Sur la distribution des valeurs des fonctions additives, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, Série A, p. 1139-1142.
- [8] MAXFIELD (J. E.). - Normal k -tuples, Pacific J. of Math., t. 3, 1953, p. 189-196.
- [9] MAXFIELD (J. E.) and SPEARS (J. L.). - Further examples of normal numbers, Publ. Math, Debrecen, t. 16, 1969, p. 119-127.
- [10] MENDES FRANCE (M.). - Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1, J. of number theory, t. 5, 1973, p. 1-15.
- [11] SCHMIDT (W.). - On normal numbers, Pacific J. of Math., t. 10, 1960, p. 661-672.

- [12] SCHMIDT (W.). - Normalität bezüglich Matrizen, J. für reine und angew. Math., t. 214/215, 1964, p. 227-260.
- [13] SIGMUND (K.). - Normal and quasiregular points for automorphisms of the torus (à paraître).
- [14] SIGMUND (K.). - Nombres normaux et théorie ergodique, Journées ergodiques [1972, Rennes] (à paraître).
- [15] WALLIN (H.). - On Bohr's spectrum of a function, Arkiv för Math., t. 4, 1961, p. 159-162.

Michel MENDES FRANCE
Université de Bordeaux-I
Mathématiques
351 cours de la Libération
33405 TALENCE
