

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PAUL ERDÖS

JEAN-LOUIS NICOLAS

Répartition des nombres superabondants

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1973-1974),
exp. n° 5, p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A3_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉPARTITION DES NOMBRES SUPERABONDANTS

par Paul ERDÖS et Jean-Louis NICOLAS

1. Introduction.

S. RAMANUJAN [10] a défini et étudié les nombres hautement composés (h. c.) [Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n , n est hautement composé si $m < n \Rightarrow d(m) < d(n)$]. En particulier, il a étudié $Q_{h.c.}(X)$ = nombre de nombres hautement composés $\leq X$, et montré que

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{Q_{h.c.}(X)}{\log X} = +\infty.$$

P. ERDÖS a montré [2] que le quotient n'/n de deux nombres hautement composés consécutifs assez grands vérifie :

$$\frac{n'}{n} \leq 1 + \frac{1}{(\log n)^c}, \text{ avec } c > 0,$$

ce qui entraîne :

$$Q_{h.c.}(X) \geq (\log X)^{1+c} \text{ pour } X \text{ assez grand.}$$

J.-L. NICOLAS a montré [8] que $Q_{h.c.}(X) \leq (\log X)^{c'}$, c' étant une constante calculable mais assez grande.

D'autre part, P. ERDÖS et L. ALAÖGLU ont défini, dans [1], les nombres superabondants :

Définition. - On dit que n est superabondant si

$$m < n \Rightarrow \frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n},$$

où $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n .

On sait que σ est une fonction multiplicative et que $\sigma(p^\alpha) = (p^{\alpha+1} - 1)/(p - 1)$ pour p premier et $\alpha \geq 1$ (Cf. [3], chap. XVI). P. ERDÖS et L. ALAÖGLU ont en particulier démontré le résultat suivant :

PROPOSITION 1. - Si la décomposition en facteurs premiers d'un nombre superabondant est $n = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \dots q^{\alpha_q} \dots p^{\alpha_p}$, on a :

$$(1) \quad \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots \geq \alpha_q \geq \dots \geq \alpha_p.$$

On a également $\alpha_p = 1$ sauf si $n = 4$ ou $n = 36$ et $q^{\alpha_q} \sim (p \log p)/\log q$ lorsque q et donc n tendent vers l'infini, p étant le plus grand nombre premier divisant n . On a enfin, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$(2) \quad p \sim \log n.$$

D'autre part, J.-L. NICOLAS ([7], p. 182) a montré que si n et n' sont deux nombres superabondants consécutifs, on avait, pour une infinité de n

$$\frac{n'}{n} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{\log n}}.$$

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soit $Q(X)$ le nombre de nombres superabondants $\leq X$; si $c < \frac{5}{48}$,
on a $Q(X) \geq (\log X)^{1+c}$ pour X assez grand.

La méthode de démonstration du théorème 1, ne permet pas (on le prouvera avec le théorème 2) de montrer que le quotient n'/n de deux nombres superabondants consécutifs assez grands vérifie

$$(3) \quad \frac{n'}{n} \leq 1 + \frac{1}{(\log n)^c}.$$

Nous allons d'abord rappeler les propriétés des nombres colossalement abondants, qui sont des nombres superabondants privilégiés faciles à calculer (§ 2). Au § 3, on étudiera les propriétés des nombres superabondants compris entre deux nombres colossalement abondants consécutifs. Au § 4, on montrera, dans le lemme 4, que, pour presque tous les nombres N colossalement abondants, l'inégalité (3) est vérifiée pour n voisin de N , ce qui démontrera le théorème 1.

On utilisera constamment le lemme suivant dû à HOHEISEL, INGHAM et HUXLEY.

LEMME 1. - Soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers $\leq x$; il existe $\tau < 1$ tel que

$$\pi(x + x^\tau) - \pi(x) \sim \frac{x + x^\tau}{\log(x + x^\tau)} - \frac{x}{\log x} \sim \frac{x^\tau}{\log x}.$$

Le meilleur résultat actuel est dû à Huxley [4] : l'équivalence précédente est vraie pour $\tau > 7/12$.

Notations. - Pour deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, la relation $f(x) \gg g(x)$ signifie que $g(x) = O(f(x))$.

Remarques. - Soit f une fonction additive. On définit n comme " f -hautement abondant" si $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$. Dans l'article [1], (p. 466, n° (9)) il est dit que "si $f(n) \neq c \log n$, alors les nombres f -hautement abondants ont pour densité 0". Cela n'est pas vrai, si l'on choisit $f(p) = \log p$ et $f(p^k) = 0$ pour $k \geq 2$. Les nombres f -hautement abondants sont les nombres non divisibles par un carré, dont la densité est $6/\pi^2$ (Cf. [3], chap XVIII).

Dans le même article, la table numérique des nombres " σ -hautement abondants", p. 467, doit être modifiée pour $1800 \leq n \leq 2340$ par

| n | facteurs de n | | | | $\sigma(n)$ |
|------|---------------|-------|-------|----|-------------|
| 1800 | 2^3 | 3^2 | 5^2 | | 6045 |
| 1920 | 2^7 | 3 | 5 | | 6120 |
| 1980 | 2^2 | 3^2 | 5 | 11 | 6552 |
| 2100 | 2^2 | 3 | 5^2 | 7 | 6944 |
| 2160 | 2^4 | 3^3 | 5 | | 7440 |
| 2340 | 2^2 | 3^2 | 5 | 13 | 7644 |

2. Nombres colossalement abondants.

Définition. - On dit que N est colossalement abondant, s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que la fonction $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon}$ atteigne son maximum en N .

Remarque. - Cette définition est légèrement différente de celle de [1], p. 455.

Si N est colossalement abondant, on a, pour tout n ,

$$(4) \quad \frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}} \leq \frac{\sigma(N)}{N^{1+\varepsilon}}.$$

PROPOSITION 2. - Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe au moins un nombre colossalement abondant associé à ε , que l'on note N_ε . D'autre part, tout nombre colossalement abondant est superabondant.

Démonstration. - On sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n)}{n \log \log n} = e^\gamma,$$

où γ est la constante d'Euler (Cf. [3], chap XVIII). Pour un ε fixé, la fonction $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon}$ tend vers 0 à l'infini et a donc un maximum absolu qu'elle atteint en un ou plusieurs points N . Un tel nombre est colossalement abondant.

D'autre part, en utilisant (4), il vient

$$n < N \Rightarrow \frac{\sigma(n)}{n} \leq \frac{\sigma(N)}{N} \left(\frac{n}{N}\right)^\varepsilon < \frac{\sigma(N)}{N},$$

et N est superabondant.

PROPOSITION 3. - Soit N un nombre colossalement abondant associé à ε . On définit, pour p premier et α entier ≥ 1 :

$$F(p, \alpha) = \frac{\log(1 + (1/(p^\alpha + p^{\alpha-1} + \dots + p)))}{\log p} = \frac{\log((p^{\alpha+1} - 1)/(p^{\alpha+1} - p))}{\log p}$$

et pour $\alpha = 0$, $F(p, 0) = +\infty$. Alors si p est premier et divise N avec l'exposant $\alpha \geq 0$, on a

$$(5) \quad F(p, \alpha) \geq \varepsilon \geq F(p, \alpha + 1).$$

Démonstration. - Si $\alpha \geq 0$, on applique l'inégalité (4) avec $n = Np$. Il vient :

$$(6) \quad \frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} \leq \left(\frac{Np}{N}\right)^{1+\varepsilon} = p^{1+\varepsilon}.$$

D'autre part,

$$(7) \quad \frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} = \frac{\sigma(p^{\alpha+1})}{\sigma(p^\alpha)} = \frac{p^{\alpha+2} - 1}{p^{\alpha+1} - 1} = p \left(1 + \frac{1}{p^{\alpha+1} + \dots + p}\right).$$

En comparant (6) et (7), on obtient $\varepsilon \geq F(p, \alpha + 1)$. L'inégalité $F(p, \alpha) \geq \varepsilon$ est évidente si $\alpha = 0$. Si $\alpha \geq 1$, on la démontre en appliquant (4) avec $n=N/p$.

Définitions. - On pose, pour p premier,

$$E_p = \{F(p, \alpha) ; \alpha \geq 1\}$$

$$E = \bigcup_{p \text{ premier}} E_p = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i, \dots\}.$$

Pour tout $\eta > 0$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de E supérieurs à η , et l'on peut ranger les éléments de E en une suite décroissante :

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_i > \dots$$

On pose $\varepsilon_0 = +\infty$.

Pour $\varepsilon > 0$, on définit $x = x_1$, $y = x_2$, x_k , pour $k \geq 2$, comme fonctions de ε , par

$$(8) \quad \begin{cases} F(x, 1) = \frac{\log(1 + (1/x))}{\log x} = \varepsilon \\ F(x_k, k) = \frac{\log(1 + (1/(x_k^k + \dots x_k)))}{\log x_k} = \varepsilon. \end{cases}$$

Ces définitions ont un sens, car pour $k \geq 1$, la fonction $t \mapsto F(t, k)$ est décroissante, pour tout $t \geq 1$, et décroît de $+\infty$ à 0. On a de plus, pour k fixé, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ (Cf. démonstration du lemme 2)

$$(9) \quad x_k \sim \sqrt[k]{kx}.$$

PROPOSITION 4.

(a) Si $\varepsilon \notin E$, la fonction $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon}$ atteint son maximum en un seul point N_ε dont la décomposition en facteurs premiers est :

$$(10) \quad N_\varepsilon = \prod_p p^{\alpha_p(\varepsilon)} \quad \text{avec} \quad \alpha_p(\varepsilon) = \left[\frac{\log((p^{1+\varepsilon} - 1)/(p^\varepsilon - 1))}{\log p} \right] - 1$$

ou si l'on préfère,

$$(11) \quad \alpha_p(\varepsilon) = k \quad \text{si} \quad x_{k+1} < p < x_k \quad \text{avec} \quad k \geq 1 \quad \text{et} \quad \alpha_p(\varepsilon) = 0 \quad \text{si} \quad p > x_1.$$

(b) Soit $i \geq 1$; pour tout $\varepsilon \in]\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i[$, N_ε est constant et égal (par définition) à N_i . Les nombres N_i sont tous distincts.

(c) Si les ensembles E_p sont disjoints deux à deux, l'ensemble des nombres colossalement abondants est égal à l'ensemble des nombres N_i , $1 \leq i$: La fonction $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon_i}$ atteint son maximum aux deux points N_i et N_{i+1} .

(d) Si les ensembles E_p ne sont pas disjoints, pour chaque $\varepsilon_i \in E_q \cap E_r$, la

fonction $\sigma(n)/n^{1+\epsilon}$ atteint son maximum en 4 points : N_i , qN_i , rN_i et $N_{i+1} = qrN_i$. Les nombres qN_i et rN_i sont colossalement abondants.

Démonstration.

(a) Soit p un nombre premier fixé. Comme $\epsilon \notin E$, alors $\epsilon \notin E_p$ et comme la suite $F(p, k)$ est strictement décroissante en k , il existe α unique, déterminé par la proposition 3 :

$$(12) \quad \frac{\log((p^{\alpha+1} - 1)/(p^\alpha - 1))}{\log p} = F(p, \alpha) > \epsilon > F(p, \alpha + 1).$$

En résolvant en α les inégalités (12), on trouve la formule (10), en désignant par $[x]$ la partie entière de x .

Si $x_{k+1} < p < x_k$, en tenant compte de (8) et (12), on a :

$$F(x_{k+1}, \alpha) > F(p, \alpha) > F(x_{k+1}, k+1) = \epsilon = F(x_k, k) > F(p, \alpha+1) > F(x_k, \alpha+1)$$

ce qui démontre (11).

(b) Les raisonnements précédents ne changent pas lorsque ϵ varie entre deux valeurs consécutives de l'ensemble E .

(c) Choisissons $\epsilon = \epsilon_1 = F(q, \beta)$. Pour $p \neq q$, $\epsilon \notin E_p$, et l'exposant de p est déterminé par (11) ou (12). D'après la proposition 3, l'exposant de q peut être choisi égal à β ou $\beta - 1$. Dans le premier cas, on trouve N_{i+1} , dans le second N_i , et la fonction $\sigma(n)/n^{1+\epsilon}$ atteint son maximum en ces deux points.

(d) Soit $\epsilon = F(p, \alpha) \in E$. Alors ϵ est irrationnel. Si l'on avait $\epsilon = a/b$, a et b entiers, on aurait $p^a = (1 + (1/(p^\alpha + \dots + p)))^b$ avec p^a entier et $(1 + (1/(p^\alpha + \dots + p)))^b$ non entier. D'après le théorème de Gel'fond-Schneider (cf. [5], chap. 2) ϵ est même transcendant.

Du théorème 1 de Lang (Cf. [6] et aussi [5], chap. 2), on déduit que, si p , q , r sont des nombres premiers distincts et si p^ϵ , q^ϵ , r^ϵ sont algébriques, alors ϵ doit être rationnel. Mais si $\epsilon \in E_p$, p^ϵ est rationnel, et on conclut que $E_p \cap E_q \cap E_r = \emptyset$.

S'il existe deux ensembles E_q et E_r non disjoints (ce qui est peu vraisemblable), et si l'on choisit

$$\epsilon_i = F(q, \beta) = F(r, \gamma) \in E_q \cap E_r$$

pour $p \neq q$ et $p \neq r$, l'exposant de p est déterminé par (11) ou (12). L'exposant de q peut être β ou $\beta - 1$, celui de r , γ ou $\gamma - 1$, d'après la proposition 3, ce qui donne les quatre possibilités annoncées.

Tables numériques. - La table 1 donne les valeurs de $F(p, \alpha)$. Les valeurs non indiquées sont inférieures à 10^{-5} . Les colonnes "exposant = i" indiquent l'exposant de p dans N_i . Ainsi, pour $\epsilon = 0,005$, pour $p = 7$, on a :

$$0,00129 < \epsilon < 0,0910,$$

donc l'exposant de 7 dans N_e est 2 .

La table 2 donne dans sa k -ième colonne les valeurs de x en fonction de x_k (x et x_k étant définis par (8)), lorsque x_k est un nombre premier. Elle est obtenue à partir de la table 1 par l'application v^{-1} si

$$v(x) = F(x, 1) = \log(1 + (1/x))/\log x .$$

L'ordre de ses termes est donc inversé par rapport à celui de la table 1. Elle permet de trouver les nombres colossalement abondants de plus grand facteur premier p donné. Pour avoir $p = 97$, on doit choisir $97 \leq x \leq 101 =$ nombre premier suivant 97, et l'on trouve

$$2^8.3^5.5^3.7^2.11^2.13.17...97 \text{ pour } x < 100,9$$

et

$$2^8.3^5.5^3.7^2.11^2.13^2.17...97 \text{ pour } x > 100,9 .$$

La table 3 donne la suite des nombres colossalement abondants. On trouvera dans [1] une table des nombres superabondants:

T A B L E 1

| $p \backslash \alpha$ | | $\alpha=1$ | | $\alpha=2$ | | $\alpha=3$ | | $\alpha=4$ | | $\alpha=5$ |
|-----------------------|--------------|------------|--------------|------------|--------------|------------|--------------|------------|--------------|------------|
| 2 | exposant = 0 | 0,58496 | exposant = 1 | 0,22239 | exposant = 2 | 0,09954 | exposant = 3 | 0,04731 | exposant = 4 | 0,02308 |
| 3 | | 0,26286 | | 0,07286 | | 0,02305 | | 0,00755 | | 0,00250 |
| 5 | | 0,11328 | | 0,02037 | | 0,00400 | | 0,00079 | | 0,00016 |
| 7 | | 0,06862 | | 0,00910 | | 0,00129 | | 0,00018 | | 0,00003 |
| 11 | | 0,03629 | | 0,00315 | | 0,00029 | | 0,00003 | | |
| 13 | | 0,02889 | | 0,00214 | | 0,00016 | | 0,00001 | | |
| 17 | | 0,02017 | | 0,00115 | | 0,00007 | | | | |

T A B L E 2

| | k=1 | | k=2 | | k=3 | | k=4 | | k=5 |
|-----|-------|--------------|-------|--------------|--------|--------------|---------|--------------|----------|
| | 2 | exposant = 1 | 3,29 | exposant = 2 | 5,44 | exposant = 3 | 9,08 | exposant = 4 | 15,36 |
| | 3 | | 6,72 | | 15,38 | | 36,3 | | 88,57 |
| | 5 | | 16,8 | | 60,50 | | 230,4 | | 920,5 |
| | 7 | | 31,4 | | 153,9 | | 812,8 | | 4531,5 |
| | 11 | | 73,4 | | 554,9 | | 4580,6 | | 40080,3 |
| | 13 | | 100,9 | | 897,2 | | 8743,5 | | 90404,7 |
| | 17 | | 168,8 | | 1951,4 | | 24842,7 | | 335898,5 |
| | k=6 | | k=7 | | k=8 | | k=9 | | k=10 |
| p=2 | 26,3 | exposant=6 | 45,7 | exposant=7 | 80,2 | exposant=8 | 142,4 | exposant=9 | 255,4 |
| p=3 | 221,7 | | 567,6 | | 1480,4 | | 3919,7 | | 10507,9 |

T A B L E 3

| | | n | $\sigma(n)$ | $\sigma(n)/n$ |
|-------------------|----------|---------------------|---------------|---------------|
| $\epsilon_1 =$ | 0,58 496 | 1 | 1 | 1 |
| $\epsilon_2 =$ | 26 286 | 2 | 3 | 1,5 |
| $\epsilon_3 =$ | 22 239 | 2 3 | 12 | 2 |
| $\epsilon_4 =$ | 11 328 | 4 3 | 28 | 2,333 |
| $\epsilon_5 =$ | 9 954 | 4 3 5 | 168 | 2,8 |
| $\epsilon_6 =$ | 7 286 | 8 3 5 | 360 | 3 |
| $\epsilon_7 =$ | 6 862 | 8 9 5 | 1 170 | 3,25 |
| $\epsilon_8 =$ | 4 731 | 8 9 5 7 | 9 360 | 3,7143 |
| $\epsilon_9 =$ | 3 629 | 16 9 5 7 | 19 344 | 3,8381 |
| $\epsilon_{10} =$ | 2 889 | 16 9 5 7 11 | 232 128 | 4,1870 |
| $\epsilon_{11} =$ | 2 308 | 16 9 5 7 11 13 | 3 249 792 | 4,5091 |
| $\epsilon_{12} =$ | 2 305 | 32 9 5 7 11 13 | 6 604 416 | 4,5818 |
| $\epsilon_{13} =$ | 2 037 | 32 27 5 7 11 13 | 20 321 280 | 4,6993 |
| $\epsilon_{14} =$ | 2 017 | 32 27 25 7 11 13 | 104 993 280 | 4,8559 |
| | | 32 27 25 7 11 13 17 | 1 889 879 040 | 5,1416 |

3. Etude des nombres superabondants compris entre deux nombres colossalement abondants consécutifs.

PROPOSITION 5. - Soit N un nombre colossalement abondant associé à ε . On définit x et x_k par (8). Soient p le plus grand facteur premier de N et P le nombre premier suivant p . Soit n un nombre superabondant compris entre N et NP , et soit λ_k le plus grand nombre premier divisant n avec l'exposant k . On a

$$(13) \quad \pi(\lambda_k) - \pi(x_k) = O(\sqrt{x_k}) = O(x_k^{\frac{1}{2k}})$$

ce qui entraîne, d'après le lemme 1, pour $\tau > 7/12$

$$(14) \quad \lambda_k = x_k + O(x_k^\tau) .$$

Démonstration. - La démonstration est la même que celle de la proposition 4 de [8], p. 120 : Pour un entier M quelconque, on définit le "bénéfice" de M , par rapport à N et à ε , par

$$\text{bén } M = \varepsilon \log \frac{M}{N} - \log \frac{\sigma(M)/M}{\sigma(N)/N}$$

et par (4), on a $\text{bén } M \geq 0$. Ensuite, on montre que, pour un nombre superabondant n compris entre N et NP , on a :

$$\text{bén } n = O\left(\frac{1}{x}\right) .$$

Enfin on montre que, si $\pi(\lambda_k) - \pi(x_k)$ était trop grand, $\text{bén } n$ serait trop grand, et on n'aurait pas $\text{bén } n = O(1/x)$.

Remarquons que le nombre colossalement abondant suivant N est $\leq NP$ et donc, pour tout nombre superabondant n , il existe au moins un N colossalement abondant tel que $N \leq n \leq NP$.

4. Démonstration du théorème 1.

La démonstration du théorème 1 repose sur trois lemmes.

LEMME 2 (lemme technique).

(a) Il existe une seule fonction $y(x)$ vérifiant $y \geq 1$ pour $x \geq 1$ et définie par la relation implicite

$$(15) \quad u(y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\log(1 + (1/(y^2 + y)))}{\log y} = \frac{\log(1 + (1/x))}{\log x} \stackrel{\text{déf}}{=} v(x)$$

(b) Quand $x \rightarrow \infty$, on a $y \sim \sqrt{2x}$ et aussi

$$(16) \quad y(x) = \sqrt{2x} \left(1 - \frac{\log 2}{2 \log x} + \frac{\log 2(4 + 3 \log 2)}{8(\log x)^2} + o\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right) \right)$$

(c) La fonction $\theta(x)$, définie par

$$(17) \quad \theta(x) = \frac{\log y(x)}{\log x} = \frac{\log(1 + (1/(y^2 + y)))}{\log x}$$

est décroissante pour $x \geq 1$. On a, pour $x \rightarrow \infty$,

$$(18) \quad \theta'(x) \sim \frac{-\log 2}{2x(\log x)^2}$$

et

$$(19) \quad \theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\log 2}{\log x} - \frac{\log 2}{2(\log x)^2} + o\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right).$$

LEMME 3 (lemme d'approximation diophantienne). - Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, tels que $2\alpha + \beta < 1$. Pour x_0 assez grand, il y a plus de $x_0/(3 \log x_0)$ nombres premiers p entre $x_0/2$ et x_0 vérifiant

$$(20) \quad \exists \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, \quad s \leq x_0^\alpha \quad \text{et} \quad \frac{x_0^\beta}{x_0} \leq \left| \theta(p) - \frac{r}{s} \right| \leq \frac{1}{sx_0^\alpha}$$

où $\theta(p)$ est défini par (17).

LEMME 4. - Soit p un nombre premier vérifiant le lemme 3 avec $\beta > \frac{1+\tau}{2}$. Soient $\varepsilon = (\log(1 + (1/p)))/\log p$ et $N = N_\varepsilon$ le nombre colossalement abondant associé à ε ; donc le plus grand facteur premier de N est p , et soit P le nombre premier suivant p . Soient n et n' deux nombres superabondants consécutifs vérifiant $N \leq n \leq NP$. Il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$(21) \quad \frac{n'}{n} \leq 1 + \frac{1}{(\log n)^c}.$$

Démonstration du lemme 2.

(a) Pour $y > 1$, la fonction $u(y)$ est strictement décroissante, comme quotient d'une fonction décroissante par une fonction croissante. Elle admet donc une fonction réciproque u^{-1} , définie sur $]0, +\infty[$. Comme $u(y) = v(x)$, on a :

$$y = u^{-1}(v(x)).$$

(b) Quand $x \rightarrow \infty$, on a $\lim y(x) = +\infty$, $v(x) \sim 1/(x \log x)$ et $u(y) \sim \frac{1}{y^2 \log y}$. On doit donc avoir

$$(22) \quad y^2 \log y \sim x \log x$$

ce qui entraîne $\log(y^2 \log y) \sim \log(x \log x)$ soit $\log y \sim \frac{1}{2} \log x$, et (22) donne alors $y \sim \sqrt{2x}$.

Pour trouver un développement limité de y , définissons $\zeta(x)$ par la relation :

$$\zeta^2 \log \zeta = x \log x.$$

On a pour $x \rightarrow \infty$, $\zeta(x) \sim \sqrt{2x}$ et :

$$\begin{aligned} u(\zeta) &= \frac{\log(1 + (1/(\zeta^2 + \zeta)))}{\log \zeta} = \frac{1}{\zeta^2 \log \zeta} + o\left(\frac{1}{\zeta^3 \log \zeta}\right) \\ &= \frac{1}{x \log x} + o\left(\frac{1}{x^{3/2} \log x}\right) = v(x) + o\left(\frac{1}{x^{3/2} \log x}\right). \end{aligned}$$

On a donc :

$$(23) \quad u(\zeta) - u(y) = o\left(\frac{1}{x^{3/2} \log x}\right).$$

On a d'autre part

$$(24) \quad u(\zeta) - u(y) = (\zeta - y) u'(\xi) \quad \text{avec } \xi \text{ entre } \zeta \text{ et } y,$$

et

$$(25) \quad u'(y) = \frac{-[(2y+1)/((y^2+y+1)(y+1)) \log y + \log(1+(1/(y^2+y)))]}{y(\log y)^2} \sim -\frac{2}{y^3 \log y}.$$

Comme $y \sim \zeta \sim \sqrt{2x}$, (23) et (24) donnent

$$(26) \quad y(x) = \zeta(x) + o(1).$$

Le développement limité de $\zeta(x)$ s'obtient par itération :

$$\zeta(x) = \sqrt{2x}(1 + o(1))$$

$$\log \zeta = \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log 2 + o(1)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{x \log x}{\log \zeta}} = \sqrt{2x/(1+(\log 2/\log x)+o(1/\log x))} = \sqrt{2x}(1 - \frac{\log 2}{2 \log x} + o(\frac{1}{\log x})).$$

En itérant à nouveau, et en utilisant (26), on obtient (16).

(c) On a :

$$(27) \quad \theta'(x) = \frac{x \log x (dy/dx) - y \log y}{xy(\log x)^2} = \frac{(1/(x+1)) - ((2y+1)/((y+1)(y^2+y+1)))}{|u'(y)| xy(\log x)^2}$$

la valeur de $u'(y)$ est donnée par (25) et le dénominateur de $\theta'(x)$ est équivalent à $(2x(\log x)^2)/(y^2 \log y) \sim 2 \log x$. Le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} - \frac{2y+1}{(y+1)(y^2+y+1)} &= \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{y^2} + o(\frac{1}{y^3}) \\ &= \frac{1}{y^2} (\frac{y^2}{x} - 2) + o(\frac{1}{x^{3/2}}) = \frac{-2 \log 2}{y^2 \log x} + o(\frac{1}{x(\log x)^2}) \end{aligned}$$

en tenant compte de (16). Cela démontre (18).

Il reste à montrer que $\theta'(x) < 0$ pour $x > 1$. Par (27), on doit montrer $x > (y^2(y+2))/(2y+1)$, c'est-à-dire, comme v est une fonction décroissante, que

$$v(x) = u(y) < v(\frac{y^2(y+2)}{2y+1})$$

c'est-à-dire

$$\frac{\log(1 + ((2y+1)/y^2(y+2)))}{\log(y^2((y+2)/(2y+1)))} - \frac{\log(1 + (1/(y^2+y)))}{\log y} > 0 \quad \text{pour } y > 1.$$

Posons

$$\varphi(y) = \log(1 + \frac{2y+1}{y^2(y+2)}) \log y - \log(1 + \frac{1}{y^2+y}) \log(y^2 \frac{y+2}{2y+1}).$$

En décomposant le dernier logarithme, et en regroupant les termes en $\log y$, il vient

$$\varphi(y) = \log(\frac{2y+1}{y+2}) \log(1 + \frac{1}{y^2+y}) - \log y \log(1 + \frac{1}{(y+1)^3}).$$

Quand $y \in [1, +\infty[$, $1 + \frac{1}{y^2+y} \in]1, 3/2]$ et, par la concavité de la fonc-

tion logarithme sur l'intervalle $(1, \frac{3}{2}]$, on a

$$\log\left(1 + \frac{1}{y^2 + y}\right) \geq \frac{2 \log 3/2}{y^2 + y} \geq \frac{2\alpha}{y^2 + y}$$

avec $\alpha = 0,405$ qui est une valeur approchée par défaut de $\log 3/2$.

En utilisant les inégalités valables pour tout $u > -1$

$$\frac{u}{1+u} \leq \log(1+u) \leq u,$$

on obtient

$$\log \frac{2y+1}{y+2} \geq \frac{y-1}{2y+1} \quad \text{et} \quad \log\left(1 + \frac{1}{(y+1)^3}\right) \leq \frac{1}{(y+1)^3},$$

ce qui donne, pour $\varphi(y)$, la minoration valable pour $y > 1$

$$(28) \quad \varphi(y) \geq \left(\frac{y-1}{2y+1}\right) \left(\frac{2\alpha}{y^2+y}\right) - \frac{\log y}{(y+1)^3} = \frac{1}{(y+1)^3} \psi(y)$$

avec $\psi(y) = 2\alpha((y-1)(y+1)^2)/(y(2y+1)) - \log y$. En posant $y = 1+t$, il vient

$$\psi(y) = \psi(1+t) = \frac{2\alpha t(t+2)^2}{(t+1)(2t+3)} - \log(1+t).$$

En dérivant, on trouve

$$\psi'(1+t) = \frac{P(t)}{(t+1)^2 (2t+3)^2}$$

avec $P(t) = 4\alpha t^4 + (20\alpha - 4)t^3 + (42\alpha - 16)t^2 + (48\alpha - 21)t + (24\alpha - 9)$.

Comme $\alpha = 0,405$ on a

$$P(t) = 1,62t^4 + 4,1t^3 + 1,01t^2 - 1,56t + 0,72.$$

Le trinôme $1,01t^2 - 1,56t + 0,72$ a un discriminant négatif, donc $P(t)$ est positif pour $t \geq 0$. On en déduit que $\psi(y)$ est croissante pour $y \geq 1$ et comme $\psi(1) = 0$, que $\psi(y)$ est positive pour $y \geq 1$ et donc aussi $\varphi(y)$ par (28), ce qui achève la démonstration.

Démonstration du lemme 3. - D'après un lemme de Dirichlet (Cf. [9], chap. 5 ou [3], chap. 11), étant donné un réel ξ quelconque et un nombre $A > 1$, il existe une fraction r/s , avec $s \leq A$ telle que $|\xi - \frac{r}{s}| \leq \frac{1}{sA}$. Posant ici $\xi = \theta(p)$ et $A = x_0^\alpha$, on obtient

$$|\theta(p) - \frac{r}{s}| \leq \frac{1}{sx_0^\alpha}.$$

D'après le lemme 2, la fonction $\theta(x)$ est décroissante. Pour chaque fraction $\frac{r}{s}$ comprise entre $\theta(\infty) = \frac{1}{2}$ et $\theta(1) = (\log 3/2)/(\log 2) = 0,585 \dots$ il existe une seule valeur $x_{r,s}$ telle que $\theta(x_{r,s}) = \frac{r}{s}$. Soit $\beta' > \beta$ tel que $2\alpha + \beta' < 1$. Pour chaque fraction $\frac{r}{s}$ telle que $s \leq x_0^\alpha$ et telle que $x_0/2 \leq x_{r,s} \leq x_0$, on retire, autour de $x_{r,s}$, une zone $|x - x_{r,s}| < x_0^{\beta'}$. En dehors de cette zone, on aura :

$$|\theta(x) - \frac{r}{s}| \geq \frac{|x - x_{r,s}|}{|\theta'(\xi)|} \gg \frac{x_0^{\beta'}}{x_0(\log x_0)^2} \geq \frac{x_0^\beta}{x_0}.$$

Dans chaque zone $|x - x_{r,s}| < x_0^{\beta'}$, il y a au plus $x_0^{\beta'} + 1$ nombres premiers, et comme $s \leq x_0^\alpha$, il y a au plus $x_0^{2\alpha}$ zones. On retire donc $O(x_0^{2\alpha+\beta'})$ nombres premiers. Comme $2\alpha + \beta' < 1$, il reste donc plus de $x_0/(3 \log x_0)$ nombres premiers pour lesquels (20) est vérifié.

Démonstration du lemme 4. - Soient p_1 et q_1 les plus grands nombres premiers divisant n avec les exposants 1 et 2. Désignons les nombres premiers successifs entourant p_1 et q_1 par

$$\dots > p_3 > p_2 < p_1 < p_1 < p_2 < p_3 \dots$$

$$\dots < q_3 < q_2 < q_1 < q_1 < q_2 < q_3 \dots$$

On applique la proposition 5 avec $\lambda_1 = p_1$, $\lambda_2 = q_1$ et $x = p$ (par (8)) :

$$(29) \quad p_1 = x + O(\sqrt{x})$$

et, à cause de (8) et (15)

$$(30) \quad q_1 = x_2 + O(\sqrt{x_2}) = y + O(\sqrt{y}) .$$

Si l'on choisit $r < x^\tau / \log x$, on aura, d'après le lemme 1,

$$(31) \quad p_r = p_1 + O(p_1^\tau) = x + O(x^\tau)$$

et

$$p_r = x + O(x^\tau) .$$

De même, si l'on choisit $s < y^\tau / \log y$, on aura

$$q_s = y + O(y^\tau) \quad \text{et} \quad Q_s = y + O(y^\tau) .$$

Avec la proposition 5, et comme par (9), $x_k \sim k^{\frac{1}{\log x}}$, on voit que, pour $r < \frac{x^\tau}{\log x}$ et $s < y^\tau / \log y$, les nombres premiers $q_1 \dots q_s$ vont diviser n avec l'exposant 2, les nombres $Q_1 \dots Q_s$, $p_1 \dots p_r$ avec l'exposant 1.

On prend pour r et s les valeurs fournies par le lemme 3. Comme $\beta > (1+\tau)/2$, on a $\alpha < (1-\beta)/2 < (1-\tau)/4$, et comme $\tau > 1/3$, il s'ensuit que

$$s \leq x_0^\alpha \Rightarrow s < \frac{y^\tau}{\log y} .$$

Si $r/s > \theta(p)$, on considère

$$(32) \quad n_1 = n \frac{p_1 \dots p_r}{q_1 \dots q_s} ,$$

Si $r/s < \theta(p)$, on considèrerait de même $n_2 = n ((Q_1 \dots Q_s)/(p_1 \dots p_r))$; les raisonnements seraient tout à fait semblables. On va montrer que

$$(33) \quad \frac{\sigma(n_1)}{n_1} > \frac{\sigma(n)}{n} .$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(n_1)}{n_1} &= \frac{\sigma(n)}{n} \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{1}{p_i}\right) \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{1 + (1/(q_i^2 + q_i))}\right) \\ &= \frac{\sigma(n)}{n} \frac{(1+(1/x))^r}{1+(1/(y^2+y))} \prod_{i=1}^r \left(\frac{1+(1/p_i)}{1+(1/x)}\right) \prod_{i=1}^s \frac{(1+(1/(y^2+y)))}{(1+(1/(q_i^2+q_i)))}\end{aligned}$$

et

$$\log \frac{\sigma(n_1)}{n_1} - \log \frac{\sigma(n)}{n} = S_1 + S_2 + S_3 ,$$

avec

$$S_1 = r \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - s \log\left(1 + \frac{1}{y^2 + y}\right) = s \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{r}{s} - \frac{\log y}{\log x}\right) >> \frac{s x_0^\beta}{x_0^2}$$

compte tenu de (15) et de (20), car $x = p$;

$$S_2 = \sum_{i=1}^r \log\left(1 + \frac{1}{p_i}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = - \sum_{i=1}^r \frac{p_i - x}{x_i^2 + x_i} = o\left(\frac{s}{x_0^{2-\tau}}\right)$$

en utilisant le théorème des accroissements finis, (31) et la relation $r < s$. On a de même

$$S_3 = \sum_{i=1}^s \log\left(1 + \frac{1}{y^2 + y}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{q_i^2 + q_i}\right) = o\left(\frac{s y^\tau}{y^3}\right) = o\left(\frac{s}{x_0^{(3-\tau)/2}}\right) .$$

Les sommes S_2 et S_3 sont négatives et $S_2 + S_3 = o(s/(x_0^{(3-\tau)/2}))$. Comme $\beta > \frac{1+\tau}{2}$, on a $S_1 + S_2 + S_3 > 0$, ce qui démontre (33)

Majorons maintenant n_1/n

$$\frac{n_1}{n} = \frac{p_1 \cdots p_r}{q_1 \cdots q_s} = \frac{x^r}{y^s} \left(\prod_{i=1}^r \left(\frac{p_i}{x}\right) \right) / \left(\prod_{i=1}^s \left(\frac{y}{q_i}\right) \right) .$$

On a

$$\log \frac{n_1}{n} = S_4 + S_5 + S_6$$

avec

$$S_4 = r \log x - s \log y = s \log x \left(\frac{r}{s} - \frac{\log y}{\log x}\right) \leq \frac{\log x_0}{x_0^\alpha}$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^r \log \frac{p_i}{x} = \sum_{i=1}^r \log\left(1 + \frac{p_i - x}{x}\right) = o\left(\frac{s x_0^\tau}{x_0}\right) = o\left(\frac{x_0^\alpha}{x_0^{1-\tau}}\right)$$

$$S_6 = - \sum_{i=1}^s \log\left(\frac{q_i}{y}\right) = - \sum_{i=1}^s \log\left(1 - \frac{y - q_i}{y}\right) = o\left(s \frac{y^\tau}{y}\right) = o\left(\frac{x_0^\alpha}{x_0^{(1-\tau)/2}}\right)$$

ce qui donne

$$(34) \quad \log \frac{n_1}{n} = o\left(\frac{\log x_0}{x_0^\alpha}\right) + o\left(\frac{x_0^\alpha}{x_0^{(1-\tau)/2}}\right) = o\left(\frac{1}{x_0^c}\right)$$

pour tout $c < \min(\alpha, ((1-\tau)/2) - \alpha)$. En choisissant α légèrement inférieur à $(1-\tau)/4$ et β légèrement supérieur à $(1+\tau)/2$, on peut prendre, pour c , toute valeur inférieure à $(1-\tau)/4 = 5/48$.

Maintenant, par (33), on a $(\sigma(n_1))/n_1 > (\sigma(n))/n$; d'après la définition des nombres superabondants, cela entraîne $n < n' \leq n_1$, donc, par (34), que

$$\log \frac{n'}{n} = O\left(\frac{1}{x_0^c}\right).$$

Comme par (2) et (29) on a

$$\log n \sim p_1 \sim p = x < x_0 ,$$

on obtient (21), ce qui démontre le lemme 4.

Démonstration du théorème 1. - Soient X assez grand et N_0 le nombre colossalement abondant précédant X . Soient ε_0 associé à N_0 , et x_0 défini par (8). Soient p_0 le plus grand facteur premier de N_0 , et P_0 le nombre premier suivant p_0 . On a :

$$N_0 \leq X < N_0 P_0 ,$$

par (11)

$$P_0 \leq x_0 < P_0 ,$$

et par (2)

$$p_0 \sim P_0 \sim \log N_0 .$$

On a donc :

$$(35) \quad x_0 \sim \log N_0 \sim \log X .$$

On conserve les notations du lemme 4. Si p vérifie le lemme 3, on a :

$$Q(NP) - Q(N) \gg (\log N)^c \gg x_0^c$$

et

$$Q(X) \geq Q(N_0) \geq \sum_{\substack{p \text{ vérifiant} \\ \text{le lemme 3}}} [Q(NP) - Q(N)] \gg \frac{x_0}{3 \log x_0} x_0^c .$$

On en déduit par (35) :

$$Q(X) \gg \frac{(\log X)^{1+c}}{\log \log X} .$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $c < (1 - \tau)/4$, on a aussi, pour tout $c < (1 - \tau)/4$ et X assez grand,

$$Q(X) \geq (\log X)^{1+c} .$$

ce qui démontre le théorème 1.

5. Nombres sans cube superabondants.

Définition. - Soit $\sigma^*(n)$ la fonction multiplicative qui vaut $\sigma^*(p^\alpha) = \sigma(p^\alpha)$ si $\alpha \leq 2$ et $\sigma^*(p^\alpha) = 0$ si $\alpha \geq 3$. On dit que n est un nombre "sans cube superabondant" si :

$$(36) \quad m < n \Rightarrow \frac{\sigma^*(m)}{m} < \frac{\sigma^*(n)}{n} .$$

Cette définition est équivalente à la suivante. Soit \mathcal{C} l'ensemble des nombres entiers non divisibles par un cube. On dit que n est un nombre "sans cube superabondant", si $n \in \mathcal{C}$ et si :

$$m \in \mathcal{C}, \quad m < n \Rightarrow \frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n}.$$

Les propriétés de ces nombres sont très voisines de celles des nombres superabondants. Si n^* est un nombre sans cube superabondant, et s'écrit $n^* = \prod p^{\alpha_p}$, on a (Cf. proposition 1)

$$2 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots > \alpha_p.$$

Un tel nombre dépend donc de deux nombres premiers q (le plus grand tel que $\alpha_q = 2$) et p (le plus grand diviseur premier).

On définit sans difficultés les nombres "sans cube colossalement abondants". Pour $\varepsilon > 0$, il existe N_ε^* en lequel la fonction $(\sigma^*(n))/(n^{1+\varepsilon})$ est maximale. Si T est l'application de $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{C}$, définie par

$$T(\prod p^{\alpha_p}) = \prod p^{\min(\alpha_p, 2)},$$

on a $N_\varepsilon^* = T(N_\varepsilon)$. Mais il n'est pas vrai que n superabondant $\Rightarrow T(n)$ sans cube superabondant. Enfin, la proposition 5 s'adapte aisément aux nombres sans cube superabondants. On pose :

$$Q^*(X) = \text{card}\{n^* \leq X, \quad n^* \text{ sans cube superabondant}\}.$$

La démonstration du théorème 1 est valable, puisqu'on ne considère que les nombres premiers divisant le nombre superabondant n avec un exposant égal à 1 ou 2. On a donc

$$Q^*(X) \geq (\log X)^{1+c}.$$

THÉORÈME 2. - Soient n^* et n'^* deux nombres sans cube superabondants consécutifs, on a

$$\lim_{n^*} \frac{n'^*}{n^*} > \sqrt[4]{2} = 1,19.$$

Démonstration. - Soit a entier ≥ 6 . Il existe, d'après le lemme 2, un nombre réel x tel que :

$$(37) \quad \theta(x) = \frac{\log y}{\log x} = \frac{a+1}{2a}.$$

On choisit $\varepsilon = (\log(1 + (1/x)))/\log x$ et N_ε^* un nombre sans cube colossalement abondant associé à ε . On désigne les nombres premiers successifs entourant x et y (définis par (15)) par

$$\begin{aligned} \dots p_3 < p_2 < p_1 \leq x < p_1 < p_2 < p_3 \dots \\ \dots q_3 < q_2 < q_1 \leq y < q_1 < q_2 < q_3 \dots \end{aligned}$$

On a

$$N = N_\varepsilon^* = 2^2 3^2 \dots q_2^2 q_1^2 q_1 q_2 \dots p_1$$

et les nombres sans cube superabondant n^* vérifiant $N \leq n^* < Nx$ sont de la forme

$$n_s = N \frac{Q_1 \dots Q_s}{p_1 \dots p_r} \quad \text{ou} \quad n'_s = N \frac{P_1 \dots P_r}{q_1 \dots q_s}$$

r étant déterminé en fonction de s par la condition $N \leq n_s < Nx$. On a, d'autre part, $s = O(\sqrt{y})$ par la proposition 5.

Si $s \geq 2a$, on a, avec (37),

$$x > \frac{n_s}{N} \geq \frac{y^s}{x^r} = \frac{y^{s-2a}}{x^{r-a-1}} \frac{y^{2a}}{x^{a+1}} = \frac{y^{s-2a}}{x^{r-a-1}},$$

d'où il vient

$$x^{r-a} > y^{s-2a} \geq 1$$

et $r - a > 0$ c'est-à-dire $r \geq a + 1$ ce qui entraîne que p_1, p_2, \dots, p_{a+1} ne divisent pas n_s . Considérons

$$n''_s = n_s \frac{p_1 \dots p_{a+1}}{Q_1 \dots Q_{2a}}.$$

On a, par (37)

$$(38) \quad n''_s < n_s \frac{x^{a+1}}{y^{2a}} = n_s$$

et

$$\frac{\sigma^*(n''_s)}{n''_s} = \frac{\sigma^*(n_s)}{n_s} \prod_{i=1}^{a+1} \left(1 + \frac{1}{p_i}\right) \prod_{i=1}^{2a} \left(\frac{1}{1 + (1/(Q_i^2 + Q_i))}\right)$$

d'où l'on tire, par (37) et (15) :

$$(39) \quad \frac{\sigma^*(n''_s)}{n''_s} > \frac{\sigma^*(n_s)}{n_s} \frac{(1 + (1/x))^{a+1}}{(1 + (1/(y^2 + y)))^{2a}} = \frac{\sigma^*(n_s)}{n_s}.$$

Si $s \geq 2a$, on voit par (36), (38) et (39) que n_s n'est pas sans cube superabondant. On démontre la même chose pour n'_s et il y a donc entre N et Nx au plus $4a$ nombres sans cube superabondants. En comparant (37) et (19), on a :

$$a \sim \frac{\log x}{\log 2},$$

ce qui démontre le théorème 2.

6. Quelques conjectures.

Il semble difficile de démontrer que l'on a, pour tout n superabondant (avec $n' =$ nombre superabondant suivant n),

$$\frac{n'}{n} < 1 + \frac{1}{(\log n)^c}.$$

Si le lemme 4 ne s'applique pas, on peut essayer d'utiliser les nombres premiers autour de $x_3 \sim \sqrt[3]{3x}$, mais il est difficile de voir si cela suffit à résoudre la question.

Il semble un peu plus facile de montrer que $Q(X) \leq (\log X)^{c'}$.

On peut s'intéresser aux nombres M_n où la fonction $(\sigma(n))/(n(\log n)^\eta)$ atteint son maximum. Les nombres M_n sont superabondants, mais il est difficile de les étudier, car la fonction $\log n$ n'est pas multiplicative. Il serait intéressant de savoir si les M_n sont colossalement abondants.

Enfin, on peut définir d_n comme le plus petit diviseur de n pour lequel

$$\sum_{d|n, d \leq n/d_n} d \leq n.$$

On pose $d_n = f(n)$. Si n est déficient (c'est-à-dire si $\sigma(n) < 2n$), on a $f(n) = 1$. P. ERDÖS sait montrer que, pour $n > n_0(\epsilon)$, on a :

$$f(n) < (\log n)^{(1+\epsilon)c} \log \log \log n,$$

mais que, pour une infinité de n , on a :

$$f(n) > (\log n)^{(1-\epsilon)c} \log \log \log n.$$

On peut considérer les entiers n tels que $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$ et regarder leurs rapports avec les nombres superabondants.

On peut étudier la généralisation du problème des nombres parfaits ($\sigma(n) = 2n$) : Quels sont les nombres tels que :

$$n = \sum_{d|n, d \leq n/3} d, \quad n \equiv 0 \pmod{3}?$$

Ces nombres sont ou parfaits et impairs, ou vérifient $\sigma(n) = \frac{5n}{2}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ERDÖS (P.) and ALAOGU (L.). - On highly composite and similar numbers, Trans. Amer. math. Soc., t. 56, 1944, p. 448-469.
- [2] ERDÖS (P.). - On highly composite numbers, J. of London math. Soc., t. 19, 1944, p. 130-133.
- [3] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers, 4th edition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1960.
- [4] HUXLEY (M. N.). - The distribution of prime numbers. Large sieves and zero density theorems, Oxford, at the Clarendon Press, 1972 (Oxford mathematical Monographs).
- [5] LANG (S.). - Introduction to the transcendental numbers. - New York, Addison-Wesley, 1966 (Addison-Wesley Series in Mathematics).
- [6] LANG (S.). - Nombres transcendants, Séminaire Bourbaki, 18e année, 1965/66, n° 305, 8 p.
- [7] NICOLAS (J.-L.). - Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations et "highly composite numbers", Bull. Soc. math. France, t. 97, 1969, p. 129-191.
- [8] NICOLAS (J.-L.). - Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan, Canad. J. of Math., t. 23, 1971, p. 116-130.
- [9] RADEMACHER (H.). - Lectures on elementary number theory. - New York, Blaisdell Publishing Company, 1964.

- [10] RAMANUJAN (S.). - Highly composite numbers, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 14, 1915, p. 347-409 ; and "Collected papers", p. 78-128. - Cambridge, at the University Press, 1927.

Paul ERDŐS
Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete
Réaltanoda u 13-15
BUDAPEST V (Hongrie)

et

Jean-Louis NICOLAS
Département de Mathématique
UER des Sciences de Limoges
123 rue Albert Thomas
87100 LIMOGES
