DANIEL BARSKY

Mesures p-adiques à densité

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1973-1974), exp. nº 4, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° 4, 6 p.

12 novembre 1973

MESURES p-ADIQUES À DENSITÉ

par Daniel BARSKY

On étudie un sous-espace du dual des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$.

Définitions. - $\mathbb{Z}_p$ est l'anneau des entiers p-adiques, $\mathbb{Q}_p$ est son corps de fractions, $|.|$ est la valeur absolue sur $\mathbb{Q}_p$ normalisé par $|p| = p^{-1}$, et $v(.)$ est la valuation associée à valeur dans $\mathbb{Z}$.

$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p , \mathbb{Q}_p)$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$, muni de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{Z}_p$; si $f \in \mathcal{C}$,

$$|f| = \sup_{x\in\mathbb{Z}_p} |f(x)| .$$

$\mathcal{C}'$ est le dual topologique de $\mathcal{C}$, muni de sa norme habituelle ; si $\mu \in \mathcal{C}'$,

$$\|\mu\| = \sup_{f\neq 0} \frac{|(\mu|f)|}{|f|} .$$

Les éléments de $\mathcal{C}'$ sont les mesures p-adiques sur $\mathbb{Z}_p$.

$\varphi_{x,h}$ est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(x , h)$ de centre x et de rayon p^{-h}.

Une suite très bien répartie bien ordonnée $U = \{u(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}_p$ est une suite d'éléments de $\mathbb{Z}_p$ telle que $v(u(i) - u(j)) = v(i - j)$ pour tout couple $(i , j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

φ_n est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(u_n , \ell(n) + 1)$ $(\ell(n)=[\frac{\log n}{\log p}])$.

$\psi_{n,h}$ est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(u_n , h)$.

Si M est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{C}(M , \mathbb{Q}_p)$ est l'espace des fonctions continues de M dans $\mathbb{Q}_p$ muni de la norme de la convergence uniforme sur M ; $\mathcal{C}'(M , \mathbb{Q}_p)$ est le dual de $\mathcal{C}(M , \mathbb{Q}_p)$.

Si $f \in \mathcal{C}$ et si U est une suite très bien répartie bien ordonnée de $\mathbb{Z}_p$, on a une représentation unique de f sous la forme

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \varphi_n(x)$$

avec

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 , \text{ et } \sup_{n\geq 0}|a_n| = |f| ;$$

a_n s'exprime par la formule

$$a_n = f(u_n) - f(u_{n-n_{\ell(n)}p^{\ell(n)}}) ,$$

où $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_{\ell(n)} p^{\ell(n)}$ ([3]).

1. Mesures p-adiques à densité.

DÉFINITION. - Une mesure p-adique μ est une mesure à densité si, pour tout point x de $\underset{\sim}{Z}_p$, il existe un élément $d_\mu(x)$ de $\underset{\sim}{Q}_p$ tel que

$$\lim_{h\to+\infty}(\mu|\varphi_{x,h}) = d_\mu(x) .$$

On notera D' l'espace des mesures p-adiques à densité sur $\underset{\sim}{Z}_p$; d_μ est la densité associée à μ.

On écrira désormais mesure au lieu de mesure p-adique. Si $\lim_{h\to+\infty}(\mu|\varphi_{x,h})$ existe seulement sur un sous-ensemble M de $\underset{\sim}{Z}_p$, on dira que μ est à densité sur M.

Exemple : La mesure de Dirac δ_x, au point $x \in \underset{\sim}{Z}_p$, définie, si $f \in \mathcal{C}$, par $(\delta_x|f) = f(x)$.

$U = \{u(i)\}_{i\in \underset{\sim}{N}}$ est une suite très bien répartie bien ordonnée de $\underset{\sim}{Z}_p$, fixée une fois pour toute. Rappelons [3] que la meilleure suite extraite de U, convergeant vers $x \in \underset{\sim}{Z}_p$, est définie par

$$h \longrightarrow u(h(x)) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant h(x) < p^h \quad \text{et} \quad |u(h(x)) - x| \leqslant p^{-h} .$$

On la notera, dans la suite, $(u(h(x)))_{h\geqslant 0}$ ou $h \longrightarrow u(h(x))$.

On définit l'élément φ_n^* de $\mathcal{C}'$ par $(\varphi_m^*|\varphi_n) = \delta_{m,n}$ (symbole de Kronecker).

On sait [6] que $\mu \in \mathcal{C}'$ admet une représentation unique $\mu = \sum_{n\geqslant 0} b_n\,\varphi_n^*$, la série du second membre convergeant simplement vers μ avec $\sup_{n\geqslant 0}|b_n| = \|\mu\|$. On a $b_n = (\mu|\varphi_n)$.

PROPOSITION 1. - Une condition nécessaire et suffisante pour que, $\mu \in \mathcal{C}'$,

$$\mu = \sum_{n\geqslant 0} b_n\,\varphi_n^*$$

soit à densité au point $x \in \underset{\sim}{Z}_p$ est que la limite suivante existe :

$$\lim_{h\to+\infty}\Big(b_{h(x)} - \sum_{q^h > q^k > h(x)} \sum_{i=1}^{p-1} b_{h(x)+iq^k}\Big) = d_\mu(x) .$$

En effet, on a vu [3] que :

$$(\mu|\varphi_{x,h}) = (\mu|\psi_{h(x),h}) \quad \text{et} \quad \psi_{h(x),h} = \varphi_{h(x)} - \sum_{q^h>q^k>h(x)} \sum_{i=1}^{p-1} \varphi_{h(x)+iq^k} .$$

COROLLAIRE. - Si $\mu \in D'$, alors, si $\mu = \sum_{n\geqslant 0} b_n\,\varphi_n^*$:

$$\lim_{h\to+\infty}(b_{k+p^h} + b_{k+2p^h} + \dots + b_{k+(p-1)p^h}) = 0$$

pour tout entier $k \geqslant 0$.

En effet,

$$d_\mu(u_k) = \lim_{h\to+\infty}\Big(b_k - \sum_{q^h>q^\ell>k} \sum_{i=0}^{p-1} b_{k+ip^\ell}\Big) .$$

PROPOSITION 2. - Si $\mu \in D'$, alors d_μ est limite simple sur $\underset{\sim}{Z}_p$ d'une suite de fonctions continues sur $\underset{\sim}{Z}_p$.

En effet,

$$d_\mu(x) = \lim_{h\to+\infty} \sum_{n=0}^{p^h-1} (\mu|\psi_{n,h})\ \psi_{n,h}(x) \ ,$$

car

$$\sum_{n=0}^{p^h-1} (\mu|\psi_{n,h})\ \psi_{n,h}(x) = (\mu|\psi_{h(x),h}) = (\mu|\varphi_{x,h}) \ .$$

PROPOSITION 3. - Soit U une suite très bien répartie bien ordonnée de $\underset{\sim}{Z}_p$ et soit $\mu = b_n\,\varphi_n^*$ une mesure à densité sur $\underset{\sim}{Z}_p$. La fonction $\mathcal{O}_\mu$ de U dans K, définie par $u(n) \to \mathcal{O}_\mu(u(n)) = b_n$, peut se prolonger à $\underset{\sim}{Z}_p$ en une limite simple de fonctions continues, en posant

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\mu(x) &= \lim_{h\to+\infty} \sum_{n=0}^{p^h-1} b_n\ \psi_{n,h}(x)\\ &= \lim_{h\to+\infty} \sum_{n=0}^{p^h-1} \mathcal{O}_\mu(u(n))\ \psi_{n,h}(x) \ .\end{aligned}$$

Si $x \notin U$, on a $\mathcal{O}_\mu(x) = d_\mu(x)$.

Comme $\sum_{n=0}^{p^h-1} b_n\ \psi_{n,h}(x) = b_{h(x)}$, il suffit de montrer que pour tout $x \in \underset{\sim}{Z}_p$, $\lim_{h\to+\infty} b_{h(x)}$ existe.

Si $x \in U$, c'est évident, car la suite $h \to u(h(x))$ est stationnaire dans ce cas. Si $x \notin U$, la suite $h \to u(h(x))$ n'est pas stationnaire. Donc, pour tout entier H, il existe $h \geq H$ tel que $u_{h(x)} \neq u_{(h+1)(x)}$. Par conséquent, $q^h \leq (h+1)(x) < q^{h+1}$. Donc :

$$\langle\mu|\varphi_{x,h+1}\rangle = \langle\mu|\psi_{(h+1)(x),h+1}\rangle = (\mu|\varphi_{(h+1)(x)}) = b_{(h+1)(x)} \ .$$

Comme ces égalités sont vérifiées pour une infinité de valeurs de h, on a bien

$$\lim_{h\to+\infty}\Big(b_{h(x)} - \sum_{q^h > q^k > h(x)} \sum_{i=1}^{p-1} b_{h(x)+iq^k}\Big) = \lim_{h\to+\infty} b_{h(x)} = d_\mu(x) \ .$$

PROPOSITION 4. - Soit μ une mesure à densité sur $\underset{\sim}{Z}_p$. La densité d_μ, associée à μ, est nulle en tous points où elle est continue. L'ensemble des points, où d_μ n'est pas nulle, est contenu dans un ensemble maigre.

On sait [2] que l'ensemble des points de discontinuité de d_μ est un sous-ensemble maigre de $\underset{\sim}{Z}_p$. Montrons que, une suite très bien répartie bien ordonnée U de $\underset{\sim}{Z}_p$ étant choisie, la fonction $\mathcal{O}_\mu$ de la proposition 3 est nulle en tous points où elle est continue. Si l'on montre ceci, alors, d'après la proposition 3, d_μ est nulle sur le complémentaire d'un ensemble maigre car U est maigre, $\mathcal{O}_\mu$ est limite simple de fonctions continues, et $\mathcal{O}_\mu(x) = d_\mu(x)$ si $x \notin U$. Donc d_μ est nulle sur un sous-ensemble partout dense de $\underset{\sim}{Z}_p$ (car le complémentaire d'un ensemble maigre de $\underset{\sim}{Z}_p$ est partout dense) et, par conséquent, d_μ est nulle en tous points où elle est continue.

Il reste à montrer que $\mathcal{O}_\mu$ est nulle en tous points de continuité. Soit $u(k) \in U$ un point de continuité de $\mathcal{O}_\mu$. On a

$$\lim_{h\to+\infty} \mathcal{O}_\mu(u_{k+ip^h}) = \mathcal{O}_\mu(u_k) \ ,$$

autrement dit,

$$\lim_{h\to+\infty} b_{k+ip^h} = b_k .$$

Le corollaire de la proposition 1 montre que

$$\lim_{h\to+\infty} \sum_{i=1}^{p-1} b_{k+ip^h} = 0$$

donc

$$\lim_{h\to+\infty} \sum_{i=1}^{p-1} b_{k+ip^h} = (p-1)b_k = 0$$

Soit maintenant $x \notin U$ un point de continuité de $\mathcal{Q}_\mu$. Soit η un réel > 0 tel que

$$|x - y| < \eta \Longrightarrow |\mathcal{Q}_\mu(x) - \mathcal{Q}_\mu(y)| < \varepsilon .$$

Choisissons $u(k) \in U$ tel que $|x - u(k)| < \varepsilon$, et h de telle sorte que $|u(k + ip^h) - u(k)| < \eta$ et

$$|\sum_{i=1}^{p-1} b_{k+ip^h}| < \varepsilon \qquad (p^h > k) \quad \text{(Corollaire de la prop. 1).}$$

Ces choix entraînent que $|\sum_{i=1}^{p-1} \mathcal{Q}_\mu(u(k + ip^h))| < \varepsilon$, donc $|(p - 1)\, \mathcal{Q}_\mu(x)| < \varepsilon$ et, par conséquent, $\mathcal{Q}_\mu(x) = 0$.

On a aussi la proposition très simple suivante.

PROPOSITION 5. - L'application d de D' dans $\underset{\sim}{Q}_p^{\underset{\sim}{Z}_p}$, définie par $\mu \xrightarrow{d} d_\mu$ est injective.

Pour la démonstration, voir [4].

Nous allons énoncer le théorème qui précise la proposition 4, et donner une indication sur sa démonstration (pour la démonstration, voir [4]).

THÉORÈME 1. - Si $\mu \in D'$, sa densité d_μ n'est pas nulle, au plus sur un ensemble dénombrable.

Indication sur la démonstration. - On montre que la proposition 4 reste vraie si μ est une mesure sur un sous-ensemble parfait M de $\underset{\sim}{Z}_p$ à densité sur M. Puis on montre que si $\mu \in D'$, on peut associer à μ une mesure $\overline{\mu}$ sur $\mathcal{C}(M, \underset{\sim}{Q}_p)$ à densité sur M telle que $d_{\overline{\mu}}$ soit la restriction de d_μ à M. Enfin, si $\mu \in D'$, d_μ est une limite simple de fonctions continues sur $\underset{\sim}{Z}_p$, on range les discontinuités de d_μ dans des sous-ensembles fermés $P_{i(\alpha)}$, où $i \in \underset{\sim}{N}$, α appartient aux ordinaux dénombrables et $\alpha < \beta(i)$, où $\beta(i)$ est un ordinal dénombrable (cf. [2]). On sait [2] que $P_{i(\alpha)}$ est la réunion d'un ensemble parfait $P^\Omega_{i(\alpha)}$ et d'un ensemble dénombrable $P_{i(\alpha)} - P^\Omega_{i(\alpha)}$. On montre alors, en utilisant ce qui précède, que d_μ n'est pas nulle uniquement sur un sous-ensemble de

$$\bigcup_{i\in \underset{\sim}{N}} \bigcup_{\alpha<\beta(i)} (P_{i(\alpha)} - P^\Omega_{i(\alpha)})$$

qui est dénombrable.

Ce théorème montre qu'à toute mesure $\mu \in D'$ on peut associer une suite de couples, indexée sur les entiers ; $(\alpha_i , \lambda_i) \in \underset{\sim}{Z}_p \times \underset{\sim}{Q}_p$ avec $\sup_{i\in \underset{\sim}{N}} |\lambda_i| < +\infty$, et telle que $d_\mu(\alpha_i) = \lambda_i$, $d_\mu(x) = 0$ si $x \notin \{\alpha_i\}_{i\in \underset{\sim}{N}}$. On donnera, sans démonstration, le théorème qui caractérise les suites $(\alpha_i , \lambda_i)_{i\in \underset{\sim}{N}}$ associées aux mesures à densité.

THÉORÈME 2. - *Soit* $(\alpha_i , \lambda_i)_{i\in \underset{\sim}{N}}$ *une suite bornée de couples de* $\underset{\sim}{Z}_p \times \underset{\sim}{Q}_p$. *Pour qu'il existe une mesure* $\mu \in D'$ *telle que*

$$d_\mu(\alpha_i) = \lambda_i \ \underline{\text{et}}\ d_\mu(x) = 0 \ \underline{\text{si}}\ x \notin \{\alpha_i\}_{i\in \underset{\sim}{N}} ,$$

il faut et il suffit que les conditions (i) *et* (ii) *soient satisfaites*

(i) *Il existe une permutation* ρ *des entiers et une suite croissante d'entiers positifs* $N = (N(i))_{i\in I}$ *tels que, pour tout* $x \in \underset{\sim}{Z}_p$ *et tout entier* $h \geqslant 0$, *la suite*

$$\ell \longrightarrow D(x , \ell , h) = \sum_i \lambda_i \quad (\underline{\text{avec}}\ 1 \leqslant \rho(i) \leqslant N(\ell) \ \underline{\text{et}}\ \alpha_i \in \mathcal{B}(x , h))$$

converge.

S'il en est ainsi, il existe une mesure $\mu \in C'$ *telle que*

$$(\mu | \varphi_{x,h}) = \lim_{\ell \to \infty} D(x , \ell , h) .$$

(ii) *Pour toute suite très bien répartie bien ordonnée* U *de* $\underset{\sim}{Z}_p$, *la fonction*

$$d_U : u(n) \longrightarrow \langle \mu | \varphi_n \rangle = b_n(U)$$

peut se prolonger en une fonction de $\underset{\sim}{Z}_p$ *à valeur dans* $\underset{\sim}{Q}_p$, *en posant*

$$d_U(x) = \lim_{h\to+\infty} b_{h(x)}(U) ,$$

et on doit avoir

$$\underline{\text{si},}\ x \notin U \ \underline{\text{et}}\ x \notin \{\alpha_i\}_{i\in \underset{\sim}{N}} , \qquad d_U(x) = 0$$

et

$$\underline{\text{si},}\ x \notin U \ \underline{\text{et}}\ x = \alpha_i , \qquad d_U(x) = \lambda_i .$$

Pour la démonstration, voir [4].

Les mesures à densité sur $\underset{\sim}{Z}$ sont liées aux éléments analytiques au sens de KRASNER sur la boule ouverte de rayon 1 de $\underset{\sim}{C}_p$ (complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$) [5].

Les mesures à densité sur $u(\underset{\sim}{Z})$, où u est une isométrie de $\underset{\sim}{Z}_p$, sont liées aux éléments analytiques multiformes au sens de KRASNER sur la boule ouverte de rayon 1 de $\underset{\sim}{C}_p$, si $u(\underset{\sim}{Z})$ possède certaines propriétés (voir [5]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Mesures p-adiques, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 6e année, 1964/65, n° 16, 6 p.

[2] BAIRE (R.). - Leçon sur les fonctions discontinues. - Paris, Gauthier-Villars, 1905 [Réimpression 1930] (Monographies sur la Théorie des Fonctions).

[3] BARSKY (D.). - Introduction aux mesures p-adiques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Groupe d'étude de théorie des nombres, 15e année, 1973/74, n° G2, 3 p.

[4] BARSKY (D.). - Mesures p-adiques à densité (à paraître).

[5] BARSKY (D.). - Mesures p-adiques et éléments analytiques (à paraître).

[6] SERRE (J.-P.). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

(Texte reçu le 12 novembre 1973)

Daniel BARSKY
36 rue de Penthièvre
75008 PARIS