Marthe Grandet-Hugot

Équirépartition dans les adèles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1973-1974), exp. n° 22, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A18_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° 22, 7 p.
13 mai 1974

ÉQUIRÉPARTITION DANS LES ADÈLES

par Marthe GRANDET-HUGOT

1. Introduction.

L'équirépartition dans les groupes compacts, introduite par ECKMANN [6], est maintenant assez bien connue, nous rappellerons simplement la définition et le critère de Weyl :

Soient G un groupe abélien compact, et μ sa mesure de Haar ; soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G, on dit qu'elle est équirépartie dans G, si

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A(N , M) = \mu(M) ,$$

pour tout sous-ensemble fermé M de G dont la frontière est de mesure nulle, $A(N , M)$ étant le nombre de termes de la suite, parmi les N premiers, qui appartiennent à M.

Pour que la suite $\{x_n\}_{n\in N}$ soit équirépartie dans G, et il faut et il suffit que, pour tout caractère continu non trivial χ de G, on ait :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} (x_n , \chi) = 0 .$$

A partir de ce résultat, nous allons rappeler la définition et les principales propriétés de l'équirépartition dans un groupe localement compact, telle qu'elle a été étudiée par RUBEL ([8], [1]).

Soit G un groupe abélien localement compact et non compact, nous désignerons par G^* son dual. Soit H un sous-groupe fermé de G, nous dirons que H est un sous-groupe d'indice compact si le groupe quotient G/H est compact, et nous désignerons par φ_H l'application canonique de G sur G/H. Un caractère non trivial χ de G sera dit périodique, de période H, s'il est constant sur les orbites de H.

Par définition, nous dirons qu'une suite $\{x_n\}_{n\in N}$ d'éléments de G est équirépartie modulo H si la suite $\{\varphi_H(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie dans le groupe compact G/H.

On en déduit alors le critère de Weyl :

Pour qu'une suite $\{x_n\}_{n\in N}$ d'éléments de G soit équirépartie modulo H, il faut et il suffit que, pour tout caractère non trivial, périodique, de période H, χ, on ait :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_n , \chi) = 0 .$$

Si $G = \underset{\sim}{R}$ et $H = \underset{\sim}{Z}$, on retrouve le critère de Weyl classique de l'équirépartition modulo 1 dans $\underset{\sim}{R}$.

Nous dirons qu'une suite $\{x_n\}_{n\in N}$ d'éléments de G est équirépartie dans G, si elle est équirépartie modulo $H^{\sim}$, pour tout sous-groupe H d'indice compact.

Si $G = \underset{\sim}{R}$, on retrouve l'équirépartition telle qu'elle a été définie par CIGLER [4].

Si $G = \underset{\sim}{Z}$, cette définition est en accord avec celle qui avait été donnée par NIVEN [7] et UCHIYAMA [10].

Le critère de Weyl s'énonce alors de la manière suivante :

La suite $\{x_n\}_{n\ N}$ d'éléments de G est équirépartie dans G si, et seulement si, pour tout caractère périodique non trivial χ, on a :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_n , \chi) = 0 .$$

Un corps local n'admet pas de sous-groupe d'indice compact, donc cette notion d'équirépartition n'a pas de sens dans un tel corps. Par contre, nous allons pouvoir l'étudier dans l'anneau des adèles d'un corps de nombres algébriques. Dans cet exposé, nous nous bornerons à étudier l'équirépartition dans l'anneau des adèles de $\underset{\sim}{Q}$. La plupart des résultats s'étendent facilement au cas de l'anneau des adèles d'un corps de nombres algébriques.

2. Équirépartition dans $\underset{\sim}{A}_{\underset{\sim}{Q}}$.

$\underset{\sim}{Q}$ désignant le corps des rationnels, p un nombre premier, nous désignerons par $\underset{\sim}{Q}_p$ le complété de $\underset{\sim}{Q}$ pour la valeur absolue p-adique, notée $|.|_p$ et normalisée par $|p|_p = \frac{1}{p}$, la valeur absolue archimédienne étant notée $|.|_\infty$.

Nous désignerons par $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}_{\underset{\sim}{Q}}$ l'anneau des adèles de $\underset{\sim}{Q}$; si $\alpha = (\alpha_p) \in \underset{\sim}{A}$, nous poserons $|\alpha|_p = |\alpha_p|_p$ et $\|\alpha\| = \sup_p |\alpha|_p$.

$\underset{\sim}{A}$ contient un sous-groupe discret d'indice compact isomorphe à $\underset{\sim}{Q}$ (que nous noterons $\underset{\sim}{Q}$) et tout $\alpha \in \underset{\sim}{A}$ peut se mettre de manière unique sous la forme :

$$\alpha = E(\alpha) + \varepsilon(\alpha) \quad \text{où} \quad E(\alpha) \in \underset{\sim}{Q} \quad \text{et} \quad \varepsilon(\alpha) \in F_a .$$

F_a, étant le domaine fondamental :

$$F_a = [a , a + 1[\times \prod_{p\neq\infty} \underset{\sim}{Z}_p$$

nous prendrons en général, $a = \frac{1}{2}$ et poserons $F = F_{\frac{1}{2}}$.

On sait également que $\underset{\sim}{A}$ est isomorphe à son dual. Plus précisément, si $\alpha = (\alpha_p) \in \underset{\sim}{A}$, on pose :

$$\lambda_\infty(\alpha) \equiv - \alpha_\infty \pmod 1 ,$$

$$\lambda_p(\alpha) \equiv \alpha_p \pmod{\underset{\sim}{Z}_p} , \quad \lambda_p(\alpha) \in \underset{\sim}{Q} , \text{ pour } p \neq \infty ,$$

$$\lambda(\alpha) = \sum_p \lambda_p(\alpha) ,$$

alors l'application $x \longrightarrow \exp 2\pi i\ \lambda(x)$ définit un isomorphisme de $\underset{\sim}{A}$ sur son dual, tout caractère continu pouvant s'écrire :

$$(x\ ,\ \alpha) = \exp 2\pi i \lambda(\alpha x)\ .$$

Alors $\underset{\sim}{Q}$ est isomorphe à son orthogonal, et il est facile de voir que les caractères périodiques de $\underset{\sim}{A}$ sont associés aux éléments $\alpha \in \underset{\sim}{A}$ tels que $\alpha_\infty \neq 0$ (On remarque que les caractères périodiques ne forment pas un groupe) [9].

(A) Equirépartition modulo $\underset{\sim}{Q}$ dans $\underset{\sim}{A}$.

$\underset{\sim}{Q}$ étant isomorphe à son orthogonal, on obtient immédiatement les résultats suivants.

CRITÈRE DE WEYL. - Une suite $\{x_n\}_{n\in N}$ d'éléments de $\underset{\sim}{A}$ est équirépartie modulo $\underset{\sim}{Q}$, si et seulement si, pour tout $a \in \underset{\sim}{Q}$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (a\ ,\ x_n) = 0\ .$$

COROLLAIRE 1. - Si $\{x_n\}_{n\in N}$ est une suite d'éléments de $\underset{\sim}{A}$, équirépartie modulo $\underset{\sim}{Q}$, alors la suite $\{\varepsilon_\infty(x_n)\}$ est équirépartie modulo 1 dans $\underset{\sim}{R}$.

Si $\alpha \in \underset{\sim}{A}$, alors :

$$\alpha = E(\alpha) + \varepsilon(\alpha)\ ,$$

$$\lambda(\alpha) = \lambda(\varepsilon(\alpha)) = \sum_p \lambda_p(\varepsilon_p(\alpha))\ ,$$

or si $p \neq \infty$,

$$\lambda_p(\varepsilon_p(\alpha)) \equiv 0 \pmod 1$$

donc

$$\lambda(\alpha) \equiv \lambda_\infty(\varepsilon_\infty(\alpha)) \equiv - \varepsilon_\infty(\alpha) \pmod 1\ .$$

Si, maintenant, $h \in \underset{\sim}{Z}^*$, on a :

$$h\alpha = E(h\alpha) + \varepsilon(h\alpha) = hE(\alpha) + h\varepsilon(\alpha)$$

donc

$$\varepsilon(h\alpha) - h\varepsilon(\alpha) \in \underset{\sim}{Z}$$

et finalement

$$\lambda(h\alpha) \equiv - h\varepsilon_\infty(\alpha) \pmod 1\ .$$

Le reste du corollaire se déduit du critère de Weyl classique.

COROLLAIRE 2. - Pour que la suite $\{n\alpha\}_{n\in N}$, où $\alpha \in A$, soit équirépartie modulo $\underset{\sim}{Q}$, dans $\underset{\sim}{A}$, il faut et il suffit que α_∞ soit irrationnel.

D'après le corollaire précédent, la condition est nécessaire, pour montrer qu'elle est suffisante, nous supposons que α_∞ est irrationnel, alors :

$$(n\alpha\ ,\ a) = (\alpha\ ,\ a)^n \quad \text{pour tout} \quad a \in A\ ,$$

alors on voit facilement que $(\alpha , a) \neq 1$ pour tout $a \in \underset{\sim}{Q}$, d'où le résultat en utilisant le critère de Weyl.

Nous allons maintenant énoncer le "théorème de Koksma" dont la démonstration s'inspire en partie de celle de Françoise BERTRANDIAS [2] et de la démonstration du théorème de Koksma classique.

THÉORÈME DE KOKSMA. - Soit D un compact de $\underset{\sim}{A}$, produit cartésien de disques circonférenciés D_p qui sont presque tous les anneaux de valuation $\underset{\sim}{Z}_p$.

Soit $\{f_n\}$ une suite d'applications de $\underset{\sim}{A}$ dans lui-même ayant les propriétés suivantes :

1° $f_n = \{f_{n,p}\}$.

Chaque $f_{n,p}$ étant une application continue de $\underset{\sim}{Q}_p$ (ou $\underset{\sim}{R}$ si $p = \infty$) dans lui-même.

2° On pose :

$$\|f_n\|_p = \sup_{x\in D} |f_{n,p}(x)|_p ,$$

et il existe un ensemble fini d'indices, soit J , contenant la valeur absolue archimédienne, tel que, pour tout $p \notin J$ et pour tout n , on ait :

$$\|f_n\|_p \leq 1 .$$

3° On pose

$$F_{m,n}(x) = f_m(x) - f_n(x) \quad \text{pour} \quad m \neq n .$$

Alors si l'une des conditions suivantes est vérifiée, la suite $\{f_n(x)\}_{n\in \underset{\sim}{N}}$ est équirépartie modulo $\underset{\sim}{Q}$ pour presque tout $x \in D$.

CONDITION I : Il existe un nombre premier $q \neq 0$ et un sous-ensemble K de N^2 contenant la diagonale tels que si $(m , n) \notin K$:

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_q = \Lambda_{m,n} |x - y|_p ,$$

où $\Lambda_{m,n}$ tend vers l'infini avec $\sup(m , n)$.

De plus, si l'on pose :

$$K_N = \mathrm{Card}\{(m , n) \in K ; \sup(m , n) \leq N\} ,$$

il existe une suite croissante d'entiers $\{N_k\}_{k\in \underset{\sim}{N}}$ telle que :

$$\lim_{k\to\infty} N_{k+1}/N_k = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} K_{N_k}/N_k^2 < \infty .$$

CONDITION II : Les fonctions $f_{n,\infty}$ sont dérivables, et

$$|f'_{n,\infty}(x) - f'_{m,\infty}(x)| \geq M > 0 ,$$

pour tout $x \in D$.

Nous nous intéressons maintenant aux deux corollaires suivants.

COROLLAIRE 1. - *Soit* $\theta \in \mathbf{A}$, $\|\theta\| > 1$, *alors la suite* $\{x\theta^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *est équirépartie* modulo $\mathbf{Q}$, *pour presque tout* $x \in \mathbf{A}$.

COROLLAIRE 2. - *Si* $\lambda \in \mathbf{A}$, *la suite* $\{\lambda x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *est équirépartie* modulo $\mathbf{Q}$ *pour presque tout* $x \in \mathbf{A}$, *tel que* $\|x\| > 1$.

(B) *Équirépartition dans* $\mathbf{A}$.

Soit A^c l'ensemble des caractères périodiques de $\mathbf{A}$, alors

$$A^c = \{\alpha \in \mathbf{A} \; ; \; \alpha_\infty \neq 0\} .$$

On obtient alors le résultat suivant.

CRITÈRE DE WEYL. - *Une suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *d'éléments de* $\mathbf{A}$ *est équirépartie dans* $\mathbf{A}$ *si, et seulement si, pour tout* $a \in A^c$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (a , x_n) = 0 .$$

COROLLAIRE. - *Pour qu'une suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *soit équirépartie dans* $\mathbf{A}$, *il faut et il suffit que, pour tout* $t \in A^c$, *la suite* $\{tx_n\}$ *soit équirépartie* modulo $\mathbf{Q}$.

En effet, d'après le critère de Weyl, la suite est équirépartie si, et seulement si, pour tout $a \in \mathbf{Q}^*$ et tout $t \in A^c$, on a :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} (at , x_n) = 0 .$$

Or $(at , x_n) = \exp 2\pi i\lambda(atx_n) = (tx_n , a)$, d'où le résultat.

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite équirépartie dans $\mathbf{A}$, et soit $t \in \mathbf{A}$, $t_\infty \neq 0$ et $t_p = 0$ pour $p \neq \infty$, alors

$$\begin{aligned}(x_n , t) &= \exp 2\pi i\lambda(tx_n) = \exp 2\pi i\lambda_\infty(t_\infty , x_n) \\ &= \exp(- 2\pi i t_\infty x_{n,\infty}) ,\end{aligned}$$

par conséquent, la suite $\{x_{n,\infty}\}$ est équirépartie dans $\mathbf{R}$.

Exemple de suite équirépartie. - Considérons la suite $\{x_n\}$, telle que $x_{n,\infty} = n^s$, $x_{n,p} = p^n$, cette suite est équirépartie dans $\mathbf{A}$.

Ce résultat fait partie du résultat plus général suivant.

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite d'éléments de* A *telle que* :

1° $\{x_{n,\infty}\}_{n\in\mathbf{N}}$ *est équirépartie dans* $\mathbf{R}$.

2° *Il existe un ensemble fini d'indices* J *tel que* $|x_n|_p \leq 1$ *pour* $p \notin J$ *et pour tout* n .

3° *Pour tout* $p \neq \infty$, *on a* $\lim_{n\to\infty} x_{n,p} = 0$.

3. Équirépartition dans les anneaux $\mathbf{A}^T_{\mathbf{Q}}$ (ou $\mathbf{A}^T$).

Soit T un ensemble de valeurs absolues de $\mathbf{Q}$ contenant la valeur absolue archimédienne. Nous désignerons par $\underset{\sim}{A}_{\underset{\sim}{Q}}^{T} = \underset{\sim}{A}^{T}$ l'anneau des T-adèles de $\underset{\sim}{Q}$, c'est-à-dire le produit direct restreint :

$$\underset{\sim}{A}^{T} = \prod_{p \in T} (\underset{\sim}{Q}_p : \underset{\sim}{Z}_p) .$$

Posons :

$$\underset{\sim}{Q}^{T} = \{x \in \underset{\sim}{Q} \ ; \ |x|_p \leqslant 1 \ \text{ pour } \ p \notin T\} .$$

$\underset{\sim}{Q}^{T}$ est un anneau de Dedekind isomorphe à un sous-groupe discret d'indice compact de $\underset{\sim}{A}^{T}$. Nous noterons $\underset{\sim}{D}^{T}$ l'orthogonal de $\underset{\sim}{Q}^{T}$ dans $\underset{\sim}{A}^{T}$, c'est un idéal fractionnaire de $\underset{\sim}{Q}^{T}$. Alors tout caractère de $\underset{\sim}{A}^{T}$ peut s'écrire

$$(x \ , \ a) = \exp(2\pi i \ \textstyle\sum_{p \in T} \lambda_p(ax)) ,$$

et l'application

$$x \longrightarrow \exp(2\pi i \ \textstyle\sum_{p \in T} \lambda_p(x))$$

définit un isomorphisme de $\underset{\sim}{A}^{T}$ sur son dual. Dans la suite, nous poserons :

$$\lambda_T(x) = \textstyle\sum_{p \in T} \lambda_p(x) .$$

On obtient alors le critère de Weyl sous la forme suivante :

CRITÈRE DE WEYL. - Une suite $\{x_n\}_{n \in \underset{\sim}{N}}$ d'éléments de $\underset{\sim}{A}^{T}$ est équirépartie modulo $\underset{\sim}{Q}^{T}$, si et seulement si, pour tout $a \in \underset{\sim}{D}^{T}$, on a

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (a \ , \ x_n) = 0 .$$

Le théorème de Koksma s'énonce et se démontre de manière analogue à ce qui a été fait pour l'équirépartition modulo $\underset{\sim}{Q}$ dans $\underset{\sim}{A}$.

Application à certains éléments algébriques. - Soit J un ensemble fini de valeurs absolues de $\underset{\sim}{Q}$ contenant la valeur absolue archimédienne. Nous rappellerons d'abord la définition suivante (A. DECOMPS [5]).

DÉFINITION. - S_J est l'ensemble des éléments $\alpha \in \underset{\sim}{A}^{J}$ tels que $|\alpha|_p > 1$ pour $p \in J$ et pour lesquels il existe un polynôme P à coefficients entiers rationnels ayant les propriétés suivantes :

- α est zéro de P ,

- pour tout p , les zéros de P , dans la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$ (distinctes de α_p, si $p \in J$) appartiennent au disque $|x|_p \leqslant 1$,

- cet ensemble est caractérisé par la propriété suivante (cf. [5]) :

Soit $\alpha \in \underset{\sim}{A}^{J}$ tel que, pour tout $p \in J$, on ait $|\alpha|_p > 1$. La condition nécessaire et suffisante pour que α appartienne à S_J est qu'il existe $\lambda \in A^{J}$ tel que, pour tout $p \in J$, on ait $|\lambda|_p > 1$ et que, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$,

$$|\varepsilon_\infty(\lambda\alpha^n)|_\infty \leq \frac{1}{2eq^2 \ \alpha_\infty(\alpha_\infty + 1)(1 + \log m)} ,$$

où

$$q = \prod_{p\in J} |\alpha_p|_p$$
$$m = \prod_{p\in J} |\lambda|_p .$$

On en déduit immédiatement que :

Si $\alpha \in S_J$, il existe $\lambda \in \underset{\sim}{A}^J$, tel que la suite $\{\lambda\alpha^n\}_{n\in \underset{\sim}{N}}$ ne soit pas équirépartie modulo $\underset{\sim}{Q}^J$.

Résultat analogue à celui qui avait été obtenu pour les nombres de Pisot-Salem dans le cas réel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERG (I. D.), RAJAGOPALAN (M.) and RUBEL (L. A.). - Uniform distribution in locally compact abelian groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 133, 1968, p. 435-446.

[2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965, 98 p.

[3] CANTOR (D.). - On the elementary theory of diophantine approximation over the ring of adeles, I., Illinois J. Math., t. 9, 1965, p. 677-700.

[4] CIGLER (J.). - Folgen normierter Masse auf kompakten Gruppen, Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie, t. 1, 1962, p. 3-13.

[5] DECOMPS-GUILLOUX (Annette). - Généralisation des nombres de Salem aux adèles, Acta Arithm., Warszawa, t. 16, 1970, p. 265-314.

[6] ECKMANN (B.). - Über monothetische Gruppen, Comment. Math. Helvet., t. 16, 1943/44, p. 249-263.

[7] NIVEN (I.). - Uniform distribution of sequences of integers, Trans. Amer. math. Soc., t. 98, 1961, p. 52-61.

[8] RUBEL (L. A.). - Uniform distribution in locally compact groups, Comment. Math. Helvet., t. 39, 1964/65, p. 253-258.

[9] TATE (J.). - Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta function, Thèse Sc. math., Princeton, 1960.

[10] UCHIYAMA (S.). - On the uniform distribution of sequences of integers, Proc. Japan Acad., t. 37, 1961, p. 605-609.

(Texte reçu le 22 avril 1974)

Marthe GRANDET-HUGOT
7 rue Joyeuse
14000 CAEN