

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

ALAIN ESCASSUT

Propriétés spectrales en analyse non archimédienne

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1973-1974),
exp. n° 17, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A13_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS SPECTRALES EN ANALYSE NON ARCHIMÉDIENNE

par Alain ESCASSUT

Le chapitre VI de [2] a mis en évidence certains problèmes concernant les propriétés spectrales en algèbre de Banach non archimédienne que nous essaierons ici d'approfondir et de résoudre de façon plus générale.

Nous désignerons par K un corps valué ultramétrique complet algébriquement clos.

1. Semi-normes spectrales.

Soit A une $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach unitaire dont la norme est notée $\|\cdot\|$, soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des homomorphismes de A sur $\mathbb{C}$ et, pour tout $x \in A$, soit $s_A(x)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $x - \lambda$ ne soit pas inversible dans A . Alors on connaît la relation

$$\sup_{\varphi \in \mathfrak{X}} |\varphi(x)| = \sup_{\lambda \in s_A(x)} |\lambda| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

vraie pour tout $x \in A$, et cette relation conduit à définir une semi-norme $\|\cdot\|_{sp}$ appelée semi-norme spectrale par

$$\|x\|_{sp} = \sup_{\varphi \in \mathfrak{X}} |\varphi(x)|.$$

Considérons maintenant une K -algèbre de Banach A dont la norme $\|\cdot\|$ n'est d'ailleurs pas supposée ultramétrique. On peut naturellement définir une semi-norme $\|\cdot\|_{si}$ par

$$\|x\|_{si} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|},$$

et il est clair que $\|\cdot\|_{si} \leq \|\cdot\|$. De plus, il résulte du théorème 1 de [3] que si l'on note $\text{Mult}(A, \|\cdot\|)$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives de A continues pour la norme $\|\cdot\|$, on a

$$\|x\|_{si} = \sup_{f \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)} f(x).$$

D'autre part, si A n'est pas un corps, l'ensemble $s_A(x)$ des $\lambda \in K$, tels que $x - \lambda$ ne soit pas inversible, est non vide pour tout $x \in A$, et l'on peut définir une semi-norme $\|\cdot\|_s$ par

$$\|x\|_s = \sup_{\lambda \in s_A(x)} |\lambda|$$

qui vérifie de façon immédiate $\|x\|_s \leq \|x\|_{si}$ du fait que A est complète.

Enfin, si A admet au moins un idéal maximal de codimension 1, l'ensemble $\mathfrak{X}$ des homomorphismes de A sur K est non vide ainsi que les ensembles

$$s_{A,K}(x) = \{\varphi(x) ; \varphi \in \mathfrak{X}\} \quad (x \in A)$$

et l'on peut définir une semi-norme $\|\cdot\|_{sa}$ par

$$\|x\|_{sa} = \sup_{\varphi \in X} |\varphi(x)| = \sup_{\lambda \in s_A(x)} |\lambda| ,$$

et l'on a trivialement $\|\cdot\|_{sa} \leq \|\cdot\|_s$.

Mais contrairement au cas d'une $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach, la double inégalité

$$\|x\|_{sa} \leq \|x\|_s \leq \|x\|_{si}$$

peut parfois être stricte ([2], théorème VI.12).

Exemple : $\|h\| = \sup |h|(r)$, $r \leq 1$, $h \in K(D)$, où $D = \{x ; |x| \leq 1\}$.

2. Propriétés (o), (p), (q).

Ceci nous conduit à étudier les trois propriétés suivantes :

Dans une K -algèbre de Banach qui n'est pas un corps, on notera (q) la propriété

$$(q) \quad \|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{si} .$$

Dans une K -algèbre de Banach, dont l'un au moins des idéaux maximaux est de codimension 1 , on notera (o) et (p) les propriétés

$$(o) \quad \|\cdot\|_{sa} = \|\cdot\|_s ,$$

$$(p) \quad \|\cdot\|_{sa} = \|\cdot\|_{si} .$$

Par définition, on voit que A possède (p) si, et seulement si, elle possède (o) et (q). Nous allons comparer de façon plus précise ces propriétés.

THEOREME 1. - Les propriétés (o) et (p) sont équivalentes dans la classe des K -algèbres de Banach dont un idéal maximal au moins est de codimension 1 .

Preuve. - Soit A une K -algèbre de Banach, et supposons que A ne possède pas la propriété (q). On se ramène tout d'abord au cas où $\|\cdot\|_{si}$ est une norme pour laquelle A est complète, puis, grâce à un procédé de calcul fonctionnel holomorphe sur le spectre d'un élément $x \in A$, tel que $\|x\|_s < \|x\|_{si}$, et en utilisant les propriétés des T -filtres ainsi qu'un résultat de MOTZKIN-ROBBA-GUENNEBAUD (selon lequel de toute suite de disques non circonferenciés deux à deux disjoints, dont la réunion est dense dans une couronne de K , on peut extraire une sous-suite convergeant vers un point de K , [5] et [4], chap. IV, preuve de la proposition 1), on démontre l'existence d'un élément $\varpi \in A$ qui est la limite d'une suite de fractions rationnelles en x , sans pôle dans $s_A(x)$, tel que $\|\varpi\|_{sa} < \|\varpi\|_s$, ce qui prouve que A ne satisfait pas (p).

PROPOSITION 1. - Soit D l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi| < 1$, et soit $A = H(D)\{T\}$ l'algèbre des séries formelles restreintes en T à coefficients dans $H(D)$, dont l'application identique sur D est notée x . Soit $X = 1 - xT$, soit $r \in]0, 1[$, et soit S l'ensemble des polynômes en X de la forme $\prod_{i=1}^n (X - a_i)^{q_i}$, où $|a_i| < r$ pour tout i . Alors l'application $\|\cdot\|_s^B$, définie sur l'algèbre $B = S^{-1}A$ par

$$t \rightarrow \|t\|_s^B = \sup_{\lambda \in s_B(t)} |\lambda| \quad (t \in B),$$

est norme, et l'algèbre de Banach $\hat{B}$ complétée de B pour cette norme possède la propriété (q), mais non la propriété (p).

Preuve. - On montre que $\|\frac{1}{x}\|_s^{\hat{B}} = \frac{1}{r}$ et $\|\frac{1}{x}\|_{sa}^{\hat{B}} = 1$, tandis que, par construction, $\hat{B}$ possède la propriété (q).

Remarque. - Rappelons à ce sujet le théorème VI. 10 de [2] qui se généralise de façon évidente dans le cas d'une K -algèbre de Banach unitaire A , même si la norme de A n'est pas ultramétrique.

Soit A une K -algèbre de Banach unitaire, qui possède la propriété (p). Soit x un élément de A dont les composantes infra-connexes du spectre D sont en nombre fini n et notées $D_1, \dots, D_n$. Soit $\Delta = sa_A(x)$, et soit $\Delta_i = D_i \cap \Delta$ ($1 \leq i \leq n$). Alors Δ_i est une frontière analytique de D_i ($1 \leq i \leq n$).

3. Idempotents associés.

Soit A une $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach, et soit $x \in A$.

On dit qu'un idempotent u de A est associé à x et à une partie E de $s_A(x)$ si, pour tout $\varphi \in \mathbb{X}$ tel que $\varphi(x) \in E$, on a $\varphi(u) = 1$, et pour tout $\varphi \in \mathbb{X}$ tel que $\varphi(x) \notin E$, on a $\varphi(u) = 0$. On a donné, dans [1] et [2], une définition semblable de la notion d'idempotents associés, et on a obtenu certains résultats dans le cas où A possède la propriété (p). Toutefois, il apparaît que si l'on veut obtenir des résultats plus généraux (en particulier si A ne satisfait plus (p) mais seulement (q)), il est préférable de considérer une notion légèrement différente d'idempotents associés qui coïncide toutefois avec la précédente si A satisfait la propriété (p), d'après les théorèmes VI.10 et VI.15 de [2].

Définition. - Soient A une K -algèbre de Banach, $\hat{\mathbb{X}}$ l'ensemble des homomorphismes de A sur des extensions de K , et soit $x \in A$. Nous dirons qu'un idempotent u de A est associé à x et à une partie E de $s_A(x)$ si, pour tout $\varphi \in \hat{\mathbb{X}}$ tel que $\varphi(x) \in E$, on a $\varphi(u) = 1$ et si, pour tout $\varphi \in \hat{\mathbb{X}}$ tel que $\varphi(x) \notin E$, $\varphi(x) \in K$, on a $\varphi(u) = 0$.

Remarque. - Si l'algèbre A possède la propriété (p), la nouvelle définition d'un idempotent associé à x et à $E \subset s_A(x)$ coïncide avec celle de [1] et [2], et tous les résultats de [1] et [2] s'appliquent à cette nouvelle définition. En particulier, si A satisfait (p) et s'il existe un idempotent associé à x et à E , il est unique ([2], théorème VI.15).

Pour généraliser le théorème VI.16 de [2], nous devons utiliser les résultats de [3] sur les semi-normes multiplicatives continues de l'algèbre $K(D)$ des fractions rationnelles sans pôle dans un fermé borné D de K .

Définition. - Nous dirons qu'une couronne vide Γ de D est x -fendue si elle

possède la propriété

$$\inf_{a \in \Gamma} |a| \|t_a\|_{si} < 1 \quad \text{où} \quad t_a = \frac{x - a}{(x - a)^2}.$$

THÉOREME 2. - Soit A une K-algèbre de Banach unitaire qui n'est pas un corps. Soit $x \in A$, soit $D = s_A(x)$, et soit Γ_0 une couronne x-fendue de D. Alors il existe un idempotent associé à x et $\mathfrak{J}(\Gamma_0)$ (resp. à x et $\mathfrak{E}(\Gamma_0)$). De plus, si les composantes infra-connexes de D sont en nombre fini ($D_1, \dots, D_n$), et si toute couronne vide de D est x-fendue, alors il existe une famille d'idempotents u_i ($1 \leq i \leq n$) tels que u_i soit associé à x et D_i , et tels que

$$(1) \quad u_i u_j = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j$$

et

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n u_i = 1$$

(Les couronnes vides Γ de D sont définies notamment dans [2], IV, ainsi que $\mathfrak{J}(\Gamma)$ et $\mathfrak{E}(\Gamma)$).

Preuve. - La démonstration du théorème 2 s'apparente naturellement à celle du théorème VI.16 de [2]. Mais, à la différence de cette dernière, il faut ici utiliser la semi-norme $\|\cdot\|_{si}$ de l'algèbre A, à l'aide du lemme qui précède.

COROLLAIRE 1. - Soit A une K-algèbre de Banach unitaire qui n'est pas un corps et qui possède la propriété (q) ; alors, pour toute couronne vide Γ de $D = s_A(x)$, il existe un idempotent associé à x et $\mathfrak{J}(\Gamma)$ (resp. x et $\mathfrak{E}(\Gamma)$) ; de même, si les composantes infra-connexes de D sont en nombre fini n, il existe une famille d'idempotents u_i ($1 \leq i \leq n$) associés à x et à D_i , et satisfaisant (1) et (2). Enfin, si A admet au moins un idéal maximal de codimension 1 et possède la propriété (p), les idempotents u_i existent, et sont uniques.

COROLLAIRE 2. - Soit A une K-algèbre de Banach unitaire qui n'est pas un corps, qui possède la propriété (q), et dont les idempotents sont en nombre fini N. Alors, pour tout $x \in A$, le nombre des composantes infra-connexes de $s_A(x)$ est majoré par N.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ESCASSUT (A.). - Spectre algébrique et idempotents associés dans une algèbre de Banach ultramétrique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, série A, p. 1285-1288.
- [2] ESCASSUT (A.). - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate, Astérisque, 1973, n° 10, p. 1-107.
- [3] GUENNEBAUD (B.). - Algèbres localement convexes sur les corps valués, Bull. Sc. math., 2e série, t. 91, 1967, p. 75-96.
- [4] GUENNEBAUD (B.). - Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques, Thèse Sc. math. Univ. Poitiers, 1973.

- [5] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Ensemble d'analycité en analyse p -adique,
Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU : Théorie des nombres, 10e année, 1968/69,
n° 8a, 5 p.

(Texte reçu le 18 mars 1974)

Alain ESCASSUT
Université de Paris-Sud
Bâtiment 425, Mathématiques
Campus universitaire
91405 ORSAY
