

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

HENRI COHEN

Variations sur un thème de Siegel-Hecke

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1973-1974),
exp. n° 14, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A11_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VARIATIONS SUR UN THÈME DE SIEGEL-HECKE

par Henri COHEN

0. Thème.

SIEGEL [4] a démontré le théorème suivant (voir [2]) :

THÉOREME 0. - Soient K un corps totalement réel de degré r sur $\mathbb{Q}$, b la différente de K , et k un entier positif pair. Posons :

$$\varepsilon_k(z) = \sum_{n \geq 0} a_k(n) q^n \quad (q = \exp 2i\pi z)$$

avec

$$a_k(0) = 2^{-r} \zeta_K(1-k)$$

$$a_k(n) = \sum_{x \in E_n} \sum_{a \supset x b} (N_a)^{k-1} \quad \text{pour } n \geq 1$$

où $E_n = \{x \in b^{-1} ; x \gg 0 \text{ et } \text{Tr } x = n\}$. Alors, si $(r, k) \neq (1, 2)$, ε_k est une forme modulaire de poids rk sur $SL_2(\mathbb{Z})$.

Le but de cet exposé est d'expliciter ce théorème et des propositions annexes dans les cas les plus simples. Les démonstrations détaillées, ainsi que des résultats plus complets, se trouvent dans [1].

1. Variation 1.

Nous supposons d'abord que K est un corps quadratique réel de discriminant D . Soit χ_D le caractère non trivial de K défini par $\chi_D(m) = \left(\frac{D}{m}\right)$. On a

$$a_k(n) = \sum_{|a| < \sqrt{nD}, a \equiv nD \pmod{2}} \sum_{d \mid (n^2 D - a^2)/4} d^{k-1} S_{a,n,D}(d)$$

où $S_{a,n,D}(d) = \sum_{a \supset ((a+n\sqrt{D})/2), N_a = d} 1$. On démontre sans difficulté le résultat suivant.

$$\text{PROPOSITION 1.1. - } S_{a,n,D}(d) = \sum_{e \mid (a,n,d, ((n^2 D - a^2)/4d))} \chi_D(e).$$

Posons alors la définition suivante :

DÉFINITION 1.2. - Soient $z \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$. On définit $\sigma_z(x)$:

(a) Si $x > 0$ est entier, $\sigma_z(x) = \sum_{d \mid x} d^z$,

(b) $\sigma_z(0) = \frac{1}{2} \zeta(-z)$ pour $z \neq -1$,

(c) $\sigma_z(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{N}$.

On déduit de la proposition 1.1 le théorème suivant.

THÉOREME 1.3. - Pour tout $n \geq 1$,

$$a_k(n) = \sum_{d|n} d^{k-1} \chi_D(d) \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sigma_{k-1}\left(\frac{(n/d)^2 D - a^2}{4}\right),$$

où la sommation sur a n'a pas besoin d'être précisée, grâce à la définition 1.2.

2. Variation 2.

Les résultats précédents permettent de donner des formules explicites pour les valeurs de la fonction zêta des corps quadratiques réels aux entiers négatifs : On utilise le théorème 1.3 ainsi que [4] (p. 90). D'où, par exemple, le résultat suivant.

THÉOREME 2.1.

$$\zeta_K(-1) = \frac{1}{60} \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sigma_1\left(\frac{D - a^2}{4}\right)$$

$$\zeta_K(-3) = \frac{1}{120} \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sigma_3\left(\frac{D - a^2}{4}\right)$$

$$\zeta_K(-5) = \frac{1}{49140} \left[\sum_{a \in \mathbb{Z}} \sigma_5(D - a^2) + (24 + 32(\chi_D(2))) \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sigma_5\left(\frac{D - a^2}{4}\right) \right]$$

et ainsi de suite.

Ces formules sont, à ma connaissance, le moyen le plus rapide pour calculer $\zeta_K(1-k)$ pour un corps quadratique réel K .

3. Variation 3.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $m \equiv 0$ ou $1 \pmod{4}$, posons

$$c_z(m) = \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sigma_z\left(\frac{m - a^2}{4}\right)$$

Notre but est de calculer $c_1(m)$ et $c_3(m)$ pour tout m . Le théorème 2.1 donne leur valeur quand m est un discriminant. On déduit en fait aisément du théorème 1.3, le suivant.

THÉOREME 3.1. - Si D est un discriminant et $k = 2$ ou 4 :

$$c_{k-1}(n^2 D) = \left(\sum_{d|n} d^{k-1} \chi_D(d) \mu(d) \sigma_{2k-1}(n/d) \right) c_{k-1}(D).$$

Soit encore, dans le langage des séries de Dirichlet, un corollaire.

COROLLAIRE 3.2. - Sous les mêmes hypothèses,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{c_{k-1}(n^2 D)}{n^s} &= 30k \zeta_K(1-k) \frac{\zeta(s) \zeta(s-2k+1)}{L(s-k+1, \chi_D)} \\ &= 30k \zeta_K(1-k) \prod_{p \text{ premier}} \frac{(1 - p^{k-1} \chi_D(p) p^{-s})}{(1 - p^{-s})(1 - p^{2k-1} p^{-s})} \end{aligned}$$

(Comparer avec [3], p. 70-71).

Ceci fournit la valeur de $c_1(m)$ et $c_3(m)$ quand m n'est pas un carré.

Quand $m = n^2$ est un carré, on fait le calcul par des procédés élémentaires. On démontre d'abord le résultat suivant.

PROPOSITION 3.3.

$$(a) \quad \sigma_z(n) \sigma_z(m) = \sum_{d|n, m} d^z \sigma_z\left(\frac{nm}{d^2}\right),$$

$$(b) \quad \sum_{1 \leq m \leq n} \sigma_z(m) \sigma_z(n-m) = \sum_{d|n} d^z \sum_{1 \leq m \leq n/d} \sigma_z(m((n/d) - m)).$$

D'autre part, avec les notations de [5], on a

$$E_4^2(z) = E_8(z); \quad E_2^2(z) = E_4(z) + \frac{6}{i\pi} E_2'(z).$$

On en déduit aisément un nouveau théorème.

THÉOREME 3.4.

$$(a) \quad c_1(n^2) = \frac{5}{12} \sum_{d|n} \mu(d) d \sigma_3\left(\frac{n}{d}\right) - \frac{1}{2} f^2,$$

$$(b) \quad c_3(n^2) = \frac{1}{120} \sum_{d|n} \mu(d) d^3 \sigma_7\left(\frac{n}{d}\right).$$

COROLLAIRE 3.5.

$$(a) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{c_1(n^2)}{n^s} = \frac{5}{12} \frac{\zeta(s) \zeta(s-3)}{\zeta(s-1)} - \frac{1}{2} \zeta(s-2),$$

$$(b) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{c_3(n^2)}{n^s} = \frac{1}{120} \frac{\zeta(s) \zeta(s-7)}{\zeta(s-3)}.$$

On constate donc que le corollaire 3.2 est aussi valable pour $D = 1$, à un terme correctif près pour c_1 , en convenant que $\zeta_K = \zeta_{\mathbb{Q}} \times \zeta_{\mathbb{Q}}$.

4. Variation 4.

Posons $\theta(z) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} q^{s^2}$, ($q = \exp 2i\pi z$), et comme précédemment soit

$$E_2(z) = -24 \sum_{n \geq 0} \sigma_1(n) q^n.$$

La variation 3 fournit les coefficients de la fonction $\theta(z) E_2(4z)$. En utilisant la théorie des formes modulaires de poids demi-entier (voir [3]), on démontre sans difficulté la proposition suivante.

PROPOSITION 4.1.

$$E_2(4z) \theta'(z) = E_2'(4z) \theta(z) + \frac{\theta''(z)}{2i\pi}.$$

On en déduit les corollaires suivants.

COROLLAIRE 4.2.

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}} s^2 \sigma_1\left(\frac{n-s^2}{4}\right) = \frac{n}{5} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sigma_1\left(\frac{n-s^2}{4}\right) - \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ non carré,} \\ \frac{n(n-1)}{15} & \text{si } n \text{ carré.} \end{cases}$$

COROLLAIRE 4.3.

$$E_2(z) \theta'(z) = \frac{1}{4} E_2'(z) \theta(z) + \frac{2\theta''(z)}{i\pi}.$$

En combinant ce corollaire avec la proposition 4.1, on obtient un nouveau corollaire, dû à Jacobi.

COROLLAIRE 4.4.

$$(a) \quad \theta^4(z) = \frac{4E_2(4z) - E_2(z)}{3},$$

$$(b) \quad r_4(n) = 8(\sigma_1(n) - 4\sigma_1(n/4)),$$

où on pose, pour tout k , $\theta^k(z) = \sum_{n \geq 0} r_k(n) q^n$.

Il existe des relations analogues pour σ_3 , mais elles sont plus compliquées. Citons, par exemple, la relation suivante.

PROPOSITION 4.5.

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathbb{Z}} s^2 \sigma_3\left(\frac{n-s^2}{4}\right) &= \frac{n}{9} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sigma_3\left(\frac{n-s^2}{4}\right) - \frac{7}{18} \sum_{s \in \mathbb{Z}} s^4 \sigma_1\left(\frac{n-s^2}{4}\right) \\ &+ \frac{n}{6} \sum_{s \in \mathbb{Z}} s^2 \sigma_1\left(\frac{n-s^2}{4}\right) - \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ non carré,} \\ \frac{n(n-1)(3n-2)}{270} & \text{si } n \text{ carré.} \end{cases} \end{aligned}$$

5. Variation 5.

On peut utiliser les résultats précédents pour calculer $r_5(n)$. Par exemple, si n est un discriminant, on a

$$r_5(n) = \sum_{|s| \leq \sqrt{n}} r_4(n - s^2) = 8 \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sigma_1(n - s^2) - 32 \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sigma_1\left(\frac{n - s^2}{4}\right).$$

Donc, d'après les théorèmes 2.1 et 3.1,

$$r_5(n) = (8(9 - 2(\frac{n}{2})) - 32) \sum_s \sigma_1\left(\frac{n - s^2}{4}\right) = 480(5 - 2(\frac{n}{2})) \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{n})}(-1).$$

Plus généralement, si on convient que

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{n})}(-1) = (\zeta_{\mathbb{Q}}(-1))^2 = 1/144 \quad \text{si } n \text{ est un carré,}$$

on démontre, de la même façon, le théorème ci-après.

THÉOREME 5.1. - Posons $n = D.(2^\alpha f)^2$, où D est 1 ou un discriminant, f un entier impair, $\alpha \geq -1$ [$(\alpha = -1) \Leftrightarrow (n \equiv 2, 3 \pmod{4})$]. Alors

$$r_5(n) = \frac{1}{7} [2^{3\alpha+5} + 3 - 2\chi_D(2)(2^{3\alpha+2} + 3)] (\sum_{d|f} d \chi_D(d) \mu(d) \sigma_3(f/d)) \times 480 \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{n})}(-1).$$

6. Variation 6.

Nous allons maintenant examiner l'application du théorème 0 aux cas où K est un corps cubique totalement réel.

Soient $K = \mathbb{Q}(\theta)$ un corps cubique totalement réel, σ_1 et σ_2 les K -isomorphismes non triviaux de K dans une clôture algébrique de K , et (u_1, u_2, u_3)

une base des entiers de K . Si (d_1, d_2, d_3) est la base duale de (u_1, u_2, u_3) (c'est-à-dire telle que $\text{Tr}(d_i u_j) = \delta_{ij}$), alors (d_1, d_2, d_3) est une base de la co-différente b^{-1} . Pour des raisons techniques, nous supposons que la base d'entiers est telle que $\text{Tr } d_3 = 1$ (Par exemple, en prenant $u_3 = 1$).

On peut écrire :

$$a_k(n) = \sum_{x \in E_n} \sum_d |N(xb)| d^{k-1} S_x(d)$$

où $S_x(d) = \sum_{a \supset x b, N a = d} 1$.

Malheureusement, contrairement au cas quadratique, je ne connais pas de formule simple analogue à la proposition 1.1 et donnant $S_x(d)$. Dans chaque cas, il faut faire un calcul particulier. Toutefois, on peut donner une bonne description de E_n .

THÉOREME 6.1. - Supposons $\text{Tr } d_3 = 1$. Soit T le triangle de sommets (u_1, u_2) ; $(\sigma_1 u_1, \sigma_1 u_2)$; $(\sigma_2 u_1, \sigma_2 u_2)$. Alors :

$$E_n = \{x ; x = n[a(d_1 - d_3 \text{Tr } d_1) + b(d_2 - d_3 \text{Tr } d_2) + d_3]\}$$

où (a, b) parcourt l'ensemble Δ_n des points à coordonnées multiples de $1/n$ à l'intérieur du triangle T .

COROLLAIRE 6.2. - Si on prend $u_3 = 1$,

$$E_n = \{x ; x = n(ad_1 + bd_2 + d_3), (a, b) \in \Delta_n\}.$$

Enfin on déduit du théorème 0 une nouvelle proposition.

PROPOSITION 6.3.

$$\zeta_K(-1) = -\frac{1}{63} a_2(1),$$

$$\zeta_K(-3) = \frac{1}{24570} (a_4(2) + 24a_4(1)),$$

et ainsi de suite.

Ce qui précède s'étend sans difficulté à un corps totalement réel de degré quelconque.

7. Exemple.

Soit K le corps cubique non abélien de discriminant 257. On a $K = \mathbb{Q}(\theta)$, où θ est racine de l'équation :

$$x^3 - x^2 - 4x + 3 = 0.$$

On sait que $(\theta, \theta^2, 1)$ est une base des entiers de K , d'où, en appelant (d_1, d_2, d_3) la base duale :

$$E_1 = \{x ; x = ad_1 + bd_2 + d_3, (a, b) \in \Delta_1\},$$

Δ_1 étant l'ensemble des points à coordonnées entières à l'intérieur du triangle T .

de sommets

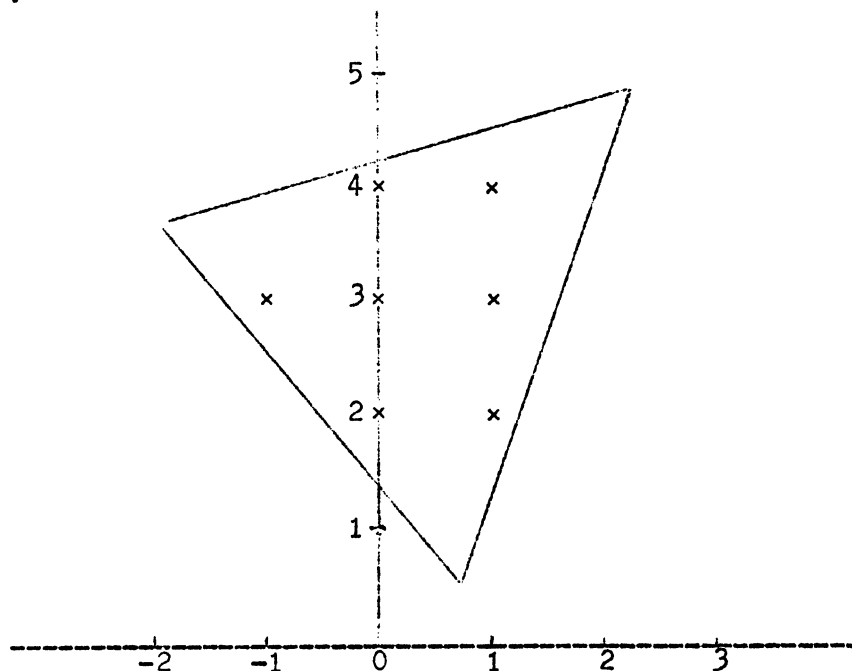
$$(\theta, \theta^2); (\sigma_1 \theta, \sigma_1 \theta^2); (\sigma_2 \theta, \sigma_2 \theta^2).$$

Un calcul numérique montre que

$$\theta = 0,71354...; \quad \sigma_1 \theta = 2,19869...; \quad \sigma_2 \theta = -1,91223...$$

$$\theta^2 = 0,50914...; \quad \sigma_1 \theta^2 = 4,83424...; \quad \sigma_2 \theta^2 = 3,65662...$$

d'où la figure :



Il y a donc 7 points dans E_1 . On obtient :

$$N(\mathfrak{xb}) = 3 \text{ pour } (a, b) = (-1, 3), (0, 4), (1, 2),$$

$$N(\mathfrak{xb}) = 5 \text{ pour } (a, b) = (0, 2), (1, 4),$$

$$N(\mathfrak{xb}) = 7 \text{ pour } (a, b) = (1, 3),$$

$$N(\mathfrak{xb}) = 9 \text{ pour } (a, b) = (0, 3).$$

Quand $\mathfrak{xb}$ est un idéal premier, il est clair que

$$\sum_{d|N(\mathfrak{xb})} a^{b-1} S_x(a) = \sum_{a \in \mathfrak{xb}} (Na)^{k-1} = 1 + (N(\mathfrak{xb}))^{k-1}.$$

Or, quand $N(\mathfrak{xb}) = 3, 5$ ou 7 , $\mathfrak{xb}$ est premier, et on vérifie que, pour $(a, b) = (0, 3)$, $\mathfrak{xb}$ est également un idéal premier, mais de degré 2. Il en résulte que

$$a_k(1) = 7 + 3 \times 3^{k-1} + 2 \times 5^{k-1} + 7^{k-1} + 9^{k-1}$$

et en particulier :

$$\zeta_K(-1) = -\frac{2}{3}.$$

D'autres exemples se trouvent dans [1].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COHEN (H.). - Variations sur un thème de Siegel-Hecke, Publications mathématiques de l'Université de Bordeaux, 1973/74, fascicule 5 (à paraître).
- [2] SERRE (J.-P.). - Formes modulaires et fonction zêta p -adiques, "Modular functions of one variable, III", p. 191-268. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).
- [3] SHIMURA (G.). - Modular forms of half integral weight, "Modular functions of one variable, I", p. 57-74. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 320).
- [4] SIEGEL (C. L.). - Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen, Gött. Nach., t. 10, 1969, p. 87-102.
- [5] SWINNERTON-DYER (H. P. F.). - On ℓ -adic representations and congruences for coefficients of modular forms, "Modular functions of one variable, III", p. 1-56. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

(Texte reçu le 2 mai 1974)

Henri COHEN
Résidence Liotard, Tour E
99 boulevard Albert 1er
33000 BORDEAUX
