

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

DANIEL BARSKY

Mesures et éléments analytiques p -adiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, n° 2 (1972-1973),
exp. n° 22, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A6_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MESURES ET ÉLÉMENTS ANALYTIQUES p -ADIQUES

par Daniel BARSKY

On donne une condition nécessaire pour qu'une série de Taylor, à coefficients dans \mathbb{C}_p , soit un élément analytique au sens de KRASNER sur le cercle de centre 0 et de rayon 1^- .

1. Notations.

\mathbb{Z}_p est l'anneau des entiers p -adiques, \mathbb{Q}_p son corps des fractions, \mathbb{C}_p le complété de la clôture algébrique de \mathbb{Q}_p . On note \mathcal{C} l'espace des fonctions continues de \mathbb{Z}_p dans \mathbb{C}_p , et \mathcal{C}' son dual. $M = \{x \in \mathbb{C}_p; |x| < 1\}$, $\mathcal{A}_b(1^-)$ est l'espace des séries de Taylor à coefficients bornés de rayon de convergence 1^- . Si $\mu \in \mathcal{C}'$, on pose

$$\|\mu\| = \sup_{f \neq 0} (|\langle \mu | f \rangle| / \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|).$$

2. Résultat.

Tout d'abord nous poserons quelques définitions.

DÉFINITION 1 [2]. - Une mesure μ est un élément du dual \mathcal{C}' de \mathcal{C} .

DÉFINITION 2 [2]. - Une mesure μ est à densité au point x par rapport à la suite $i \rightarrow h_i$ si, et seulement si, la limite suivante existe

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle \mu | \varphi_{x, h_i} \rangle = d_\mu(x),$$

où $\varphi_{x, h_i}(y)$ est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(x, h_i)$ de centre x et de rayon $1/p^i$.

On sait [4] que si $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base normale de \mathcal{C} , alors, si $(e_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$ sont des éléments de \mathcal{C}' tels que $\langle e_i^* | e_j \rangle = \delta_i^j$, on peut écrire tout élément de \mathcal{C}' sous la forme $\mu = \sum_{n \geq 0} a_n e_n^*$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée d'éléments de \mathbb{C}_p , la série du second membre convergeant au sens de la convergence simple sur \mathcal{C} , et $\|\mu\| = \sup_{n \geq 0} |a_n|$. Donc $\mathcal{C}' \simeq \ell^\infty$.

De même, si l'on munit $\mathcal{A}_b(1^-)$ de la norme \sup des coefficients, il est clair que l'on a un isomorphisme d'espace de Banach entre $\mathcal{A}_b(1^-)$ et ℓ^∞ , donc entre \mathcal{C}' et $\mathcal{A}_b(1^-)$. Nous allons préciser maintenant ceci.

Soit $F(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathcal{A}_b(1^-)$. On sait [1] que les polynômes $\binom{X}{n}$ ($n \geq 0$) forment une base normale de \mathcal{C} . Donc on peut trouver une mesure μ_F telle que

$$\langle \mu_F | \binom{X}{n} \rangle = a_n, \quad \forall n \geq 0.$$

On peut donc écrire

$$F(X) = \sum_{n \geq 0} \langle \mu_F | \binom{x}{n} \rangle X^n \Rightarrow F(X) = \langle \mu_F | \sum_{n \geq 0} \binom{x}{n} X^n \rangle .$$

Or $\sum_{n \geq 0} \binom{x}{n} X^n = (1 + X)^x$ si

$$|X| < 1, \quad F(X) = \langle \mu_F | (1 + X)^x \rangle .$$

PROPOSITION. - A tout élément $F \in \mathcal{A}_b(1^-)$, on peut associer de manière biunivo-
que un élément $\mu_F \in \mathcal{C}'$, défini par

$$\langle \mu_F | (1 + X)^x \rangle = F(X), \quad \forall X \in M .$$

Si l'on muni \mathcal{C}' de la norme $\| \cdot \|$, et $\mathcal{A}_b(1^-)$ de la norme \sup des coeffi-
cients, cette correspondance est une isométrie d'espaces de Banach.

Posons

$$\varphi_{-j-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x + j + 1| > 1/p^{h(j)+1} \\ 1 & \text{si } |x + j + 1| \leq 1/p^{h(j)+1} \end{cases}$$

C'est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(-j-1, h(j)+1)$ de centre $-j-1$ et de rayon $1/p^{h(j)+1}$ ($j = j_0 + j_1 p + \dots + j_{h(j)} p^{h(j)}$).

On sait [3] que $(\varphi_{-j-1}(x))_{j \geq 0}$ est une base normale de \mathcal{C} . Donc

$$(1) \quad \langle \mu_F | (1 + X)^x \rangle = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{p^h-1} \langle \mu_F | \varphi_{-j-1} \rangle ((1 + X)^{-j-1} - (1 + X)^{-j-1+j(h(j)} p^{h(j)})$$

ou encore, en posant $b_j^h = \langle \mu_F | \varphi_{-j-1,h} \rangle$,

$$\langle \mu_F | (1 + X)^x \rangle = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{p^h-1} \langle \mu_F | \varphi_{-j-1,h} \rangle / (1 + X)^{j+1} = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{p^h-1} b_j^h / (1 + X)^{j+1}$$

LEMME 1. - Soit $F_h(X) = \sum_{j=0}^{p^h-1} b_j^h / (1 + X)^{j+1}$ une suite de fractions rationnelles
convergeant simplement sur M vers $F(X) \in \mathcal{A}_b(1^-)$. Pour que $b_j^h = \langle \mu_F | \varphi_{-j-1,h} \rangle$,
il faut et il suffit que, $\forall h \geq 0, \forall X \in M$,

$$|F_h(X) - F(X)| \leq |1 - 1/(1 + X)^{p^h}| |\varepsilon(X)|$$

(où $\varepsilon(X)$ est borné pour tout $X \in M$).

La condition nécessaire découle de l'expression (1). La condition suffisante provient de :

$$F_h(u - 1) - F(u - 1) = 0$$

si $u \in V_h$ groupe des racines p^h -ième de l'unité. D'après la condition nécessaire, ceci entraîne que, $\forall u \in V_h$,

$$\sum_{j=0}^{p^h-1} (\langle \mu_F | \varphi_{-j-1} \rangle - b_j^h) / u^{j+1} = 0$$

donc $\langle \mu_F | \varphi_{-j-1} \rangle - b_j^h = 0$.

THÉORÈME. - Tout élément analytique au sens de KRASNER de $\alpha_b(1^-)$ possède une mesure associée qui est à densité sur les entiers strictement négatifs pour la suite $h \rightarrow h!$.

On peut montrer que la mesure associée est aussi à densité sur les entiers positifs ou nuls. Nous allons utiliser 2 lemmes pour démontrer ce théorème.

LEMME 2. - Les mesures à densités au point x pour la suite $i \rightarrow h_i$ forment un sous-espace fermé de C' muni de la norme $\| \cdot \|$.

Soient $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et μ des mesures telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_n - \mu\| = 0,$$

on suppose qu'au point x , et pour la suite $i \rightarrow h_i$, les μ_n sont à densité.

Pour n et m assez grands,

$$|\langle \mu_n | \varphi_{x, h_i} \rangle - \langle \mu_m | \varphi_{x, h_i} \rangle| < \varepsilon,$$

donc $|\langle \mu_n | \varphi_{x, h_i} \rangle - \langle \mu_m | \varphi_{x, h_i} \rangle| < \varepsilon$. La suite $\langle \mu_n | \varphi_{x, h_i} \rangle$ est donc de Cauchy, elle admet une limite ℓ . Montrons que $\ell = \lim_{i \rightarrow +\infty} \langle \mu | \varphi_{x, h_i} \rangle$. Or on a

$$\ell - \langle \mu | \varphi_{x, h_i} \rangle = \ell - \langle \mu_n | \varphi_{x, h_i} \rangle + \langle \mu_n | \varphi_{x, h_i} \rangle - \langle \mu_n | \varphi_{x, h_i} \rangle + \langle \mu_n | \varphi_{x, h_i} \rangle - \langle \mu | \varphi_{x, h_i} \rangle,$$

et la conclusion du lemme en découle.

LEMME 3. - Toute fraction rationnelle sans pôle dans M admet une mesure associée qui est à densité sur les entiers négatifs pour la suite $h \rightarrow h!$.

Il suffit de montrer le lemme pour les fractions du type $1/(X - a)^i$, où $a \notin M$. On va raisonner par récurrence sur i . Si $i = 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{X - a} &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - (1 + a)^p} \sum_{j=0}^{h-1} \frac{(1 + a)^j}{(1 + X)^{j+1}}, \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - (1 + a)^p} \frac{1 - \left(\frac{1 + a}{1 + X}\right)^p}{X - a}, \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{X - a} + \left(1 - \frac{1}{(1 + X)^p}\right) \frac{(1 + a)^p}{1 - (1 + a)^p} \frac{1}{X - a} \end{aligned}$$

donc, d'après le lemme 1,

$$\langle \mu_a | \varphi_{-j-1, h} \rangle = \frac{(1 + a)^j}{1 - (1 + a)^p};$$

- si $|a| > 1$, alors

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \langle \mu_a | \varphi_{-j-1, h!} \rangle = 0$$

- si $|a| = 1$ et si ξ_a est la racine $(p^r - 1)$ -ième la plus proche de $1 + a$, on a

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \langle \mu_a | \varphi_{-j-1, h!} \rangle = (1 + a)^j / 1 - \xi_a$$

(on note μ_a la mesure associée à $1/X - a$). Notons $\mu_a^{(i)}$ la mesure associée à $1/(X - a)^i$, et faisons l'hypothèse de récurrence suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \lim_{h \rightarrow +\infty} \langle \mu_a^{(i)} | \varphi_{-j-1, h!} \rangle = \begin{cases} \binom{j}{i-1} \frac{(1+a)^{j-i+1}}{1-\xi_a} & \text{si } |a| = 1 \\ 0 & \text{si } |a| > 1. \end{cases} \\ 2^\circ \text{ la convergence est uniforme en } j \text{ pour } j \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Grâce au lemme 1, on montre, en utilisant le fait que $1/(X-a)^{i+1} = 1/(X-a)^i \cdot 1/X-a$, que

$$\begin{aligned} \langle \mu_a^{(i+1)} | \varphi_{-j-1, h!} \rangle &= \sum_{k=0}^{j-1} \langle \mu_a^{(i)} | \varphi_{-k-1, h!} \rangle \langle \mu_a | \varphi_{-j+k, h!} \rangle \\ &\quad + \sum_{k=j}^{p^h-1} \langle \mu_a^{(i)} | \varphi_{-k-1, h!} \rangle \langle \mu_a | \varphi_{-p^h+k-j, h!} \rangle \end{aligned}$$

et le lemme 3 découle de cette formule.

Le théorème découle immédiatement des lemmes 2 et 3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math., Paris 1963).
- [2] AMICE (Yvette). - Mesures p-adiques, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 6e année, 1964/65, n° 16, 6 p.
- [3] BARSKY (Daniel). - Fonctions k-lipschitziennes sur un anneau local et polynômes dont les dérivées sont à valeurs entières, Thèse 3e cycle, Math., Univ. Paris-7, 1972.
- [4] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

(Texte reçu le 9 mai 1973)

Daniel BARSKY
10 avenue Stéphane Mallarmé
75017 PARIS