

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

GEORGES RHIN

Répartition modulo 1 de $f(p_n)$ quand f est une fonction entière

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, n° 2 (1972-1973),
exp. n° 20, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A4_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉPARTITION modulo 1 DE $f(p_n)$
 QUAND f EST UNE FONCTION ENTIÈRE

par Georges RHIN

1. Introduction et résultats.

En utilisant le critère de WEYL [7], il est immédiat de démontrer que la suite $(n\alpha)_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1 (E. R. (1)) si, et seulement si, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Dans son livre [5], I. M. VINOGRADOV démontre que la suite $(p_n \alpha)_{n \geq 1}$, où p_n désigne le n -ième nombre premier, est E. R. (1) si et seulement si, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. De même, l'inégalité de VAN DER CORPUT permet de démontrer que la suite $(\alpha_1 n + \dots + \alpha_k n^k)_{n \geq 1}$ est E. R. (1) si l'un des α_i est irrationnel. En 1948 [6], VINOGRADOV donne des conditions suffisantes sur l'un des coefficients α_i ($2 \leq i \leq k$) pour que la suite $(\alpha_1 p_n + \dots + \alpha_k p_n^k)_{n \geq 1}$ soit E. R. (1). En fait, cette suite est E. R. (1) si, et seulement si, l'un des coefficients α_i ($1 \leq i \leq k$) est irrationnel [4].

Récemment G. RAUZY ([2] et [3]) a démontré que si f était une fonction entière $f(X) = \sum_{k \geq 0} v_k X^k$ non réduite à un polynôme, prenant des valeurs réelles sur l'axe réel et telle que

$$(1) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log \log \sup_{|z|=r} |f(z)|}{\log \log r} \right\} < \frac{5}{4},$$

alors la suite $(\lambda f(n))_{n \geq 1}$ était E. R. (1) pour tout $\lambda \neq 0$.

Nous démontrons le résultat suivant.

THÉORÈME 1. - Soit f une fonction entière qui satisfait aux conditions ci-dessus. Alors la suite $(\lambda f(p_n))_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1 pour tout $\lambda \neq 0$.

Nous indiquerons en premier lieu quelques propriétés des fonctions f , puis nous donnerons les étapes de la démonstration du théorème 1.

2. Quelques propriétés de f [3].

Les inégalités de Cauchy entraînent qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log(1/|v_n|)/n^{5+4\alpha} = +\infty.$$

Nous définissons la suite (n_k) de la façon suivante :

(i) n_0 est le plus petit entier tel que $v_{n_0} \neq 0$,

(ii) si n_k est défini, on pose $\ell_k = \log 1/|v_{n_k}|$, et m_k égal à la borne supérieure des nombres réels m tels que

$$\forall n \geq n_k, \quad \log 1/|v_n| \geq \ell_k + m(n - n_k).$$

n_{k+1} est alors le plus grand entier n tel que

$$\log 1/|v_n| = l_k + m_k(n - n_k) .$$

n_{k+1} existe d'après la condition (2).

En fait, les points (n_k, l_k) sont les sommets du "polygone de Newton" de f , c'est-à-dire de l'enveloppe convexe inférieure des points $(n, \log(1/|v_n|))$.

On pose

$$p_k = \frac{n_k l_k}{n_k^2 - 2}, \quad P_k = e^{p_k}, \quad M_k = e^{m_k} \quad \text{et} \quad Q_k = 4^{-(n_{k+1})} M_k .$$

Il existe k_1 tel que (d'après [3]),

$$\forall k \geq k_1 \quad \frac{l_k}{n_k - 3} \leq \frac{l_{k+1}}{n_{k+1} - 3} \leq m_k .$$

Nous supposons maintenant que $k \geq k_1$.

Nous avons, pour $x \in [0, Q_k]$,

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \right| \leq 2^{n+1} \frac{|v_n|}{M_k}, \quad \text{où } n = n_k .$$

Si

$$g(x) = \sum_{t=0}^n \frac{(x-H)^t}{t!} f^{(t)}(H) \quad \text{et} \quad 0 < P_k - H,$$

nous avons, pour $P_k - H \leq x \leq H$,

$$|f(x) - g(x)| \leq 2^{n+1} \frac{|v_n|}{M_k} P_k^{n+1}$$

qui tend vers 0 en raison du choix de M_k et P_k . De plus, le coefficient α , le plus haut degré de $g(x)$, vérifie

$$\frac{|v_n|}{2} < |\alpha| < \frac{3}{2}|v_n| .$$

3. Les étapes de la démonstration du théorème 1.

Il est clair que si f vérifie les conditions du paragraphe 1, λf , pour $\lambda \neq 0$, les vérifie aussi. Le théorème sera donc démontré si la somme

$$(3) \quad S = \sum_{p \leq N} e(f(p)) \quad \text{où } e(x) = e^{2\pi i x}$$

vérifie $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S}{\pi(N)} = 0$. Pour N assez grand, il existe k tel que $P_k < N \leq Q_k$. De plus, il existe s tel que $s \geq k$ et

$$(4) \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right) p_s < \log N \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right) p_{s+1} .$$

Nous poserons $r = \log N$.

Pour utiliser les méthodes de VINOGRADOV majorant les sommes doubles, nous examinerons la somme

$$\Sigma = \sum_{x \leq N, (x, F)=1} e(f(x)) \quad \text{où } F = \prod_{p \leq N}^{1/4} p .$$

au lieu de la somme S , car nous avons $S = \Sigma + \Sigma_1 + O(N^{1/4})$, où les x de la

somme Σ_1 sont produits de deux ou trois nombres premiers et

$$\Sigma = \sum_{d \in \mathbb{P}, dm \leq N} \mu(d) e(f(dm)) .$$

(a) Si $(1 - (1/n_s^2))p_s < r \leq (2 - (1/n_s))p_s$, nous découperons l'intervalle $[1, N]$ en intervalles plus petits, et nous approcherons dans chaque intervalle $f(x)$ par un polynôme $g(x)$ de degré n_s dont le coefficient de plus haut degré α vérifiera $\frac{1}{2}|v_n| < \alpha < \frac{3}{2}|v_n|$. On pourra alors utiliser le lemme 9, chapitre I de [5], et le théorème de la valeur moyenne de VINOGRADOV ([1], p. 181).

(b) Si $(2 - (1/n_s))p_s < r \leq p_{s+1}/(n_s + 1)$, nous approcherons dans tout l'intervalle de sommation $f(x)$ par $\sum_{t=0}^{n_s} v_t x^t$, et nous approcherons v_i par ses réduites $v_i = a_i/q_i + \theta_i/(q_i \tau_i)$. Nous serons alors ramenés à des démonstrations de même type que celles utilisées dans [4]. Malheureusement, les démonstrations ne peuvent pas s'utiliser directement car ici le degré du polynôme tend vers l'infini avec N .

(c) Si $p_{s+1}/n_{s+1} < r \leq (1 - (1/n_{s+1}^2))p_{s+1}$, on approche $f(x)$ par le polynôme $\sum_{t=0}^{n_{s+1}} v_t x^t$, et l'on opère comme ci-dessus.

Remarquons enfin que l'on ne peut pas remplacer la constante $5/4$ de (1) par $\epsilon > 2$ d'après [3], et que son remplacement par $4/3$ dépend directement de l'amélioration du théorème de la valeur moyenne de VINOGRADOV ([1], p. 181).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HUA (L. K.). - Additive theory of prime numbers. - Providence, American mathematical Society, 1972 (Translations of mathematical Monographs, 30).
- [2] RAUZY (G.). - Fonctions entières et répartition modulo 1, Bull. Soc. math. France, t. 100, 1972, p. 409-415.
- [3] RAUZY (G.). - Fonctions entières et répartition modulo 1, II., Bull. Soc. math. France (à paraître).
- [4] RHIN (G.). - Sur la répartition modulo 1 des suites $f(p)$, Acta Arithmetica, Warszawa, t. 23, 1973, p. 217-248.
- [5] VINOGRADOV (I. M.). - The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. Translated from Russian. - London, Interscience Publishers, 1954.
- [6] VINOGRADOV (I. M.). - Sur l'évaluation de sommes trigonométriques avec des nombres premiers [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, Serija Mat., t. 12, 1948, p. 225-248.
- [7] WEYL (H.). - Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, Math. Annalen, t. 77, 1916, p. 313-352.

(Texte reçu le 29 mai 1973)

Georges RHIN
44 rue de Touraine
57160 MOULINS LES METZ