Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Daniel Barsky

Théorie de Baire p-adique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, n° 2 (1972-1973), exp. n° 19, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° 19, 5 p.
26 mars 1973

THÉORIE DE BAIRE p-ADIQUE

par Daniel BARSKY

1. Rappels et notations.

On désire caractériser les limites simples de fonctions continues de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{Q}_p$.

$\underset{\sim}{Z}_p$ est le complété de $\underset{\sim}{Z}$ pour la norme p-adique définie par $|a - b| = 1/p^h m$ avec $(m , p) = 1$.

$\underset{\sim}{Q}_p$ est le corps des fractions de $\underset{\sim}{Z}_p$.

Une suite très bien répartie bien ordonnée (en abrégé T. B. R. B. O.) de $\underset{\sim}{Z}_p$ est une suite d'éléments de Z_p $(u_n)_{n\in N}$ telle que $|u_i - u_j| = |i - j|$ (par exemple, la suite des entiers naturels.) (voir [1] et [4]).

$$Q_n(x) = \frac{(x - u_0)(x - u_1)\dots(x - u_{n-1})}{(u_n - u_0)(u_n - u_1)\dots(u_n - u_{n-1})} \quad (\text{si } u_n = n , \quad Q_n(x) = \binom{x}{n}).$$

On sait que [1]

$$f(x) \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{Q}_p) \Longleftrightarrow f(x) = \textstyle\sum_{n\geqslant 0} a_n Q_n(x)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \qquad (a_n \in \underset{\sim}{Q}_p) .$$

Si $n \in \underset{\sim}{N}$, on pose

$$n = n_0 + n_1 p + \dots + n_{h(n)} p^{h(n)} .$$

$\varphi_n(x)$ est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(u_n , h(n) + 1)$ de centre u_n et de rayon $1/(p^{h(n)+1})$; $\varphi_{x,h}(y)$ est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(x,h)$ de centre x et de rayon $1/p^h$. On sait [3] que

$$f \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{Q}_p) \Longleftrightarrow f(x) = \textstyle\sum_{n\geqslant 0} b_n \varphi_n(x)$$

avec $b_n \in \underset{\sim}{Q}_p$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, et en outre on a

$$b_n = f(u_n) - f(u_{n-n_{h(n)}p^{h(n)}}) .$$

On note $B^1(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{Q}_p)$ l'espace des limites simples de fonctions continues sur $\underset{\sim}{Z}_p$, donc $f \in B^1(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{Q}_p) \Longleftrightarrow$ il existe une suite f_n de fonction de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{Q}_p)$ telle que $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \underset{\sim}{Z}_p$. L'oscillation de f au point x par rapport au sous-ensemble $M \subset \underset{\sim}{Z}_p$ est

$$\omega(f , x , M) = \lim_{h\to+\infty} \sup_{(y,z)\in(\mathcal{B}(x,h)\cap M)^2} |f(y) - f(z)| .$$

DÉFINITION 1. - Soit $U = (u_0, u_1, \ldots)$ une suite T. B. R. B. O. de $\mathbb{Z}_p$, et soit x un point de $\mathbb{Z}_p$. La meilleure suite convergeant vers x, extraite de la suite T. B. R. B. O. U, est définie par :

$$h \dashrightarrow u_{h_x} \; ; \quad |u_{h_x} - x| \leqslant \frac{1}{p^h} \; ; \quad 0 \leq h_x < p^h \; .$$

DÉFINITION 2. - Soit f une fonction de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$ bornée, et soit

$$U = (u_0, u_1, \ldots)$$

une suite T. B. R. B. O. de $\mathbb{Z}_p$. On dit que f est séquentiellement continue au point x (resp. sur $\mathbb{Z}_p$) si, et seulement si,

$$\lim_{h\to+\infty} f(u_{h_x}) = f(x) \quad (\text{resp. } \forall x \in \mathbb{Z}_p, \; \lim_{h\to+\infty} f(u_{h_x}) = f(x)),$$

où la suite $h \dashrightarrow u_{h_x}$ est la meilleure suite convergeant vers x.

2. Résultat.

THÉORÈME. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in B^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$;

(ii) Quel que soit l'ensemble parfait $M \subset \mathbb{Z}_p$, l'ensemble

$$P_i(M) = \{x \in M \; ; \; \omega(f, x, M) \geqslant \frac{1}{p^i}\}$$

est rare dans M pour tout entier $i < +\infty$;

(iii) Il existe une suite T. B. R. B. O. de $\mathbb{Z}_p$ telle que f soit séquentiellement continue par rapport à cette suite.

Ce résultat transpose donc, au cas p-adique, le théorème de Baire [2].

On démontrera que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

La démonstration de (i) $\Rightarrow$ (ii) est identique à celle de [2].

LEMME 1. - Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite de fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$

$$f_h(x) = \sum_{n=0}^{p^h-1} (f(u_n) - f(u_{n-n_{h(n)}p^{h(n)}}))\, \varphi_n(x)$$

converge pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$ vers f est que f soit séquentiellement continue par rapport à la suite T. B. R. B. O. $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$

En effet, on a $f_h(x) = f(u_{h_x})$, $\forall x \in \mathbb{Z}_p$. Le lemme 1 montre donc que (iii)$\Rightarrow$(i).

Pour montrer que (ii) $\Rightarrow$ (iii), nous allons construire une suite T. B. R. B. O. $U = (u_0, u_1, \ldots)$ associée à f telle que f soit séquentiellement continue par rapport à cette suite. Dans la suite, α désignera un ordinal dénombrable (pour la théorie, voir [2]) qui sera accessible si $\alpha - 1$ existe, et inaccessible sinon. Ω désigne le premier ordinal non dénombrable.

On rappelle le résultat suivant qui se démontre comme dans [2].

PROPOSITION. - Soient P_0 , P_1 , P_2 , ... , P_α , ... des ensembles fermés indexés par les ordinaux dénombrables, tels que $\alpha' > \alpha \Rightarrow P_{\alpha'} \subseteq P_\alpha$, alors il existe un ordinal dénombrable β tel que $P_\beta = P_{\beta+1} = \dots = P_\Omega$. En outre,

(i) Si pour tout ordinal inaccessible α , $P_\alpha = \bigcap_{\alpha'<\alpha} P_{\alpha'}$ alors

$$P_0 = \sum_{\gamma<\beta}(P_\gamma - P_{\gamma+1}) + P_\Omega \ ;$$

(ii) Si, en plus de (i), on a $P_\Omega = \emptyset$, et si P_0 est borné, alors le plus petit ordinal γ , tel que $P_\gamma = \emptyset$, est accessible ;

(iii) Si les ensembles P_i sont tels qu'un point isolé de l'un d'eux n'appartient pas au suivant, alors P_Ω est nul ou parfait.

On notera, comme dans [2], P^1 le premier dérivé de P , P^2 le dérivé de P^1 , puis, pour tout ordinal dénombrable accessible, P^α le dérivé de $P^{\alpha-1}$, et pour tout ordinal inaccessible, $P^\alpha = \bigcap_{\alpha'<\alpha} P^{\alpha'}$.

Soit i_1 , i_2 , ... , i_α , ... une suite d'entier indexée sur les ordinaux dénombrable et telle que si α est accessible, i_α est fini, et si i_α est inaccessible, $i_\alpha = \sup_{\alpha'<\alpha} i_{\alpha'}$ (éventuellement $+\infty$). On associe à cette suite des ensembles fermés grâce à la fonction f vérifiant (ii).

$$P_{i_1} = \{x \in \underset{\sim}{Z}_p \ ; \ \omega(f , x , \underset{\sim}{Z}_p) \geqslant \frac{1}{p^{i_1}}\}$$

d'après (ii), P_{i_1} est rare dans $\underset{\sim}{Z}_p$. On décompose P_{i_1} , à la manière du (ii), de la proposition.

$$P_{i_1} = \sum(P^\nu_{i_1} - P^{\nu+1}_{i_1}) + P^\Omega_{i_1} \ ,$$

et $P^\Omega_{i_1}$ est nul ou parfait. Puis, par récurrence transfinie, on définit

$$P_{i_1,\dots,i_\alpha} = \{x \in P^\Omega_{i_1,\dots,i_{\alpha-1}} \ ; \ \omega(f,x,P^\Omega_{i_1,\dots,i_{\alpha-1}}) > \frac{1}{p^{i_\alpha}}\} \quad \text{si } \alpha \text{ est accessible,}$$

et

$$P_{i_1,\dots,i_\alpha} = \bigcap_{\alpha'<\alpha} P_{i_1,\dots,i_{\alpha'}} \quad \text{si } \alpha \text{ est inaccessible.}$$

D'après la proposition, il existe nécessairement β accessible tel que

$$P_{i_1,\dots,i_\beta} = \emptyset \ ,$$

et donc aussi, $\forall\ \beta' > \beta$, $P_{i_1,\dots,i_{\beta'}} = \emptyset$, car f possède la propriété (ii).

LEMME 2. - A toute boule $\mathcal{B}(x , h)$, on associe un ensemble $P^\nu_{i_1,\dots,i_\alpha}(x , h)$ tel que :

(i) $P^\nu_{i_1,\dots,i_\alpha}(x , h) \cap \mathcal{B}(x , h) \neq \emptyset$ et

$$P^{\nu+1}_{i_1,\dots,i_\alpha}(x , h) \cap \mathcal{B}(x , h) = \emptyset \ \text{ si } \ \nu \neq \Omega \ ;$$

<u>si</u> $\nu = \Omega$, $P^{\Omega}_{i_1,\dots,i_\alpha}(x , h) \cap \mathcal{B}(x , h) \neq \emptyset$, <u>et</u>

$$P_{i_1,\dots,i_\alpha,i_{\alpha+1}} \cap \mathcal{B}(x , h) = \emptyset , \quad \forall\, i_{\alpha+1}$$

(ii) $\forall\, \alpha' < \alpha$, <u>si</u> α' <u>accessible,</u>

$P_{i_1,\dots,i_{\alpha'}}(x , h) \cap \mathcal{B}(x , h) \neq \emptyset$ et $P_{i_1,\dots,i_{\alpha'-1}}(x , h) \cap \mathcal{B}(x , h) = \emptyset$

<u>si</u> α' <u>inaccessible</u>

$$P_{i_1,\dots,i_{\alpha'}}(x , h) = \bigcap_{\alpha''<\alpha'} P_{i_1,\dots,i_{\alpha''}}(x , h) .$$

On constate aisément que les conditions (i) et (ii) définissent de manière unique une suite d'entiers $i_1 , \dots , i_\alpha , \dots$ et d'ensembles $P_{i_1,\dots,i_\alpha}$, et le processus de construction s'arrête nécessairement d'après la proposition.

LEMME 3. - <u>A tout point</u> x , <u>on associe un ensemble</u> $P^{\nu}_{i_1,\dots,i_\alpha}(x)$ <u>tel que</u>

(i) $x \in P^{\nu}_{i_1,\dots,i_\alpha}(x)$, <u>mais</u> $x \notin P^{\nu+1}_{i_1,\dots,i_\alpha}(x)$ <u>si</u> $\nu \neq \Omega$;

<u>si</u> $\Omega = \nu$, <u>alors</u> $x \in P^{\Omega}_{i_1,\dots,i_\alpha}(x)$, <u>mais</u> $x \notin P^{\Omega}_{i_1,\dots,i_\alpha,i_{\alpha+1}}(x)$, $\forall\, i_{\alpha+1}$.

(ii) $\forall\, \alpha'$ <u>accessible,</u> $\alpha' < \alpha$, $x \in P_{i_1,\dots,i_{\alpha'}}(x)$, <u>mais</u> $x \notin P_{i_1,\dots,i_{\alpha'-1}}(x)$; <u>si</u> α' <u>est inaccessible,</u>

$$P_{i_1,\dots,i_{\alpha'}}(x) = \bigcap_{\alpha''<\alpha'} P_{i_1,\dots,i_{\alpha''}}(x) .$$

On constate, comme au lemme 2, que les conditions (i) et (ii) définissent univoquement l'ensemble $P^{\nu}_{i_1,\dots,i_\alpha}(x)$.

On construit une suite T. B. R. B. O. de la manière suivante :

On choisit u_0 dans $P^{\nu}_{i_1,\dots,i_\alpha}(0 , 0)$ (ensemble associé à $\mathcal{B}(0 , 0)$) de manière arbitraire. Supposons la suite construite jusqu'à u_{p^h-1} , et construisons-la jusqu'à l'indice $p^{h+1}-1$.

$\underset{\sim}{Z}_p - \bigcup_{n=0}^{p^h-1} \mathcal{B}(u_n , h + 1)$ est réunion de $p^{h+1} - p^h$ boules disjointes de rayons $1/p^{h+1}$. Soient $\alpha_{p^h} , \dots , \alpha_{p^{h+1}-p^h}$ les centres de ces boules ; on supposera que $|\alpha_n - u_{n-n_{h(n)}p^{h(n)}}| = \frac{1}{p^h}$. On choisira u_n pour $p^h \leqslant n < p^{h+1}$ arbitrairement dans $P^{\nu}_{i_1,\dots,i_\alpha}(\alpha_n , h + 1) \cap \mathcal{B}(\alpha_n , h + 1)$. La suite ainsi construite est T. B. R. B. O., appelons-la U . Il reste à montrer que f est séquentiellement continue par rapport à la suite U , ceci résultera du lemme suivant.

LEMME 4. - <u>Soient</u> $P^{\nu}_{i_1,\dots,i_\alpha}(x)$ <u>l'ensemble associé à</u> x <u>par le lemme</u> 3, <u>et</u> $P^{\nu'}_{j_1,\dots,j_\gamma}(x , h)$ <u>l'ensemble associé à</u> $\mathcal{B}(x , h)$ <u>par le lemme</u> 2, <u>alors l'une des deux affirmations suivantes est vraie</u>

(i) <u>il existe</u> h_0 <u>tel que</u>, <u>pour tout</u> $h \geqslant h_0$ <u>on a</u> $\alpha = \gamma$, $\nu = \nu'$ <u>et</u>

$$i_1 = j_1 \ , \ \ldots \ , \ j_\alpha = i_\alpha \ .$$

(ii) $\lim_{h \to +\infty} f(y) = f(x)$, $y \in P^{\nu'}_{j_1,\ldots,j_\gamma}(x , h)$.

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de ce lemme qui est longue, mais ne présente pas de difficultés particulières compte tenu des définitions de

$$P^{\nu}_{i_1,\ldots,i_\alpha}(x) \quad \text{et} \quad P^{\nu'}_{j_1,\ldots,j_\gamma}(x , h) \ .$$

Le théorème est démontré.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> $U = (u_0 , u_1 , \ldots)$ <u>la suite construite ci-dessus</u>, <u>alors</u> f <u>est limite d'une suite de polynômes</u>, <u>de degré</u> p^{2h} , f_h <u>tels que l'on ait</u>

$$f_h(u_n) = f(u_n) \ \ \underline{\text{si}} \ \ 0 \leqslant n < p^h$$

$$f_h(u_n) = f_h(u_{n+rp^h}) \ \ \underline{\text{si}} \ \ 0 \leqslant n < p^h \ , \ 1 \leqslant r < p^h \ .$$

Ceci se démontre aisément en remarquant que φ_n est une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $1/(p^{h(n)+1})$ (voir [3]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math., Paris 1963).

[2] BAIRE (René). - Leçon sur les fonctions discontinues. - Paris, Gauthier-Villard, 1930.

[3] BARSKY (Daniel). - Fonctions k-lipschitziennes sur un anneau local et polynômes dont les dérivées sont à valeurs entières, Thèse 3e cycle, Math., Univ. Paris-7, 1972.

[4] HELSMOORTEL (Eve). - Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local, C. R. A. S., t. 271, 1970, p. 546-548.

(Texte reçu le 8 mai 1973)

Daniel BARSKY
10 avenue Stéphane Mallarmé
75017 PARIS