Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean-Marc Deshouillers

Amélioration de la constante de Šnirelman dans le problème de Goldbach

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1972-1973), exp. nº 17, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° 17, 4 p.

12 mars 1973

AMÉLIORATION DE LA CONSTANTE DE ŠNIRELMAN DANS LE PROBLÈME DE GOLDBACH

par Jean-Marc DESHOUILLERS

On démontre par une méthode élémentaire que tout nombre supérieur à 1 est somme d'au plus 159 nombres premiers, et en modifiant légèrement la méthode par des arguments de nature analytique, on remplace 159 par 75.

1. Introduction.

En 1742, GOLDBACH a conjecturé que tout nombre pair, supérieur à 2 , est somme de deux nombres premiers, et donc que tout entier supérieur à 1 est somme d'au plus trois nombres premiers. ŠNIRELMAN a démontré, en 1933 (cf. [7]), qu'il existe une constante $\varkappa$ telle que tout entier supérieur à 1 est somme d'au plus $\varkappa$ nombres premiers ; VINOGRADOV (cf. [8]) a démontré, en 1937, que tout entier assez grand est somme d'au plus quatre nombres premiers. En ce qui concerne les résultats valables pour tous les entiers, le meilleur est celui de KLIMOV, qui a démontré, en 1969 (cf. [5]), que l'on pouvait choisir $\varkappa = 6.10^9$. Nous indiquerons ici comment la méthode de Šnirelman convenablement modifiée permet de montrer que l'on peut choisir $\varkappa = 75$.

Appelons $r(N)$ le nombre de représentations de l'entier pair N en somme de 2 nombres premiers ; dans le second paragraphe, nous majorerons $r(N)$ par la méthode du crible de Brun-Selberg ; nous minorerons ensuite $r(N)$ en moyenne, et nous en déduirons une minoration de la densité des nombres pairs qui sont somme de deux nombres premiers, dans le troisième paragraphe ; nous expliquerons enfin, dans le quatrième paragraphe, comment on en déduit la majoration de $\varkappa$.

2. Majoration de $r(N)$.

Nous renvoyons le lecteur au chapitre IV du livre de HALBERSTAM et ROTH (cf. [3]), et plus particulièrement au paragraphe 7 (Borne supérieure) pour un exposé de la méthode de SEBERG ; contentons-nous ici de citer le résultat qui nous intéresse.

PROPOSITION 1. - *Définissons la fonction multiplicative* g *par* :

$$g(p) = 1/(p-1) \quad \textit{quand} \quad p \quad \textit{divise} \quad N ,$$

$$g(p) = 2/(p-2) \quad \textit{quand} \quad p \quad \textit{ne divise pas} \quad N ,$$

$$g(p^a) = 0 \quad \textit{quand} \quad a \quad \textit{est supérieur à} \quad 1 ,$$

et appelons G *sa fonction sommatoire* $(G(x) = \sum_{d\leq x} g(d))$.

On a alors la relation, valable pour tout x ,

$$r(N) \leqslant N/G(x) + 2.x + x^2.(G(x))^2 .$$

Pour évaluer la quantité $G(x)$., nous suivrons la méthode proposée par HALBERSTAM et RICHERT en [2] ; celle-ci repose sur l'évaluation de la somme $\sum_{p\leqslant x} w(p)$, où $w(p)$ vaut 1 si p divise N , et 2 dans le cas contraire.

Par des moyens entièrement élémentaires, on peut évaluer cette somme et en déduire le résultat suivant :

LEMME 1. - La quantité

$$r(N) \times \prod_{p\neq 2, p|N} \frac{p-2}{p-1} \times \frac{(\log N)^2}{N}$$

est majorée par 13,44 pour tout N supérieur à $\exp(455)$, et par 16,43 pour tout N supérieur à $\exp(283)$.

3. Minoration de $r(N)$ en moyenne.

Soit X un nombre réel positif ; remarquons que la somme $\sum_{N<X} r(N)$ est égale au nombre de couples de nombres premiers dont la somme est inférieure à X ; on peut donc calculer cette somme lorsque l'on connaît une estimation pour $\pi(x)$. Le théorème des nombres premiers implique que la somme est équivalente à

$$\frac{1}{2}.(X^2/(\log X)^2)$$

lorsque X tend vers l'infini.

En utilisant les résultats effectifs de ROSSER et SCHOENFELD (cf. [6]), on obtient le lemme suivant.

LEMME 2. - Si X est un nombre réel supérieur à $\exp(455)$, on a

$$\sum_{X/256<N\leqslant X} r(N) \geqslant 0,495\left(\frac{X}{\log X}\right)^2$$

En revanche, si l'on n'utilise que les estimations effectives fournies par la théorie élémentaire (cf. [1] pour une minoration de $\pi(x)$, et [4] pour une majoration), on obtient la minoration plus faible ci-après.

LEMME 2'. - Si X est un nombre réel supérieur à $\exp(283)$, on a

$$\sum_{X/256<N\leqslant X} r(N) \geqslant 0,297\left(\frac{X}{\log X}\right)^2 .$$

Soit maintenant X un nombre réel satisfaisant les hypothèses du lemme 2 (resp. 2') ; posons $\gamma = 13,44$ (resp. $\gamma = 16,43$), $\alpha = 0,495$ (resp. $\alpha = 0,297$) et $M(X)$ le nombre d'entiers pairs compris entre $X/256$ et X et qui sont somme de deux nombres premiers. D'après l'inégalité de Hölder (là où ŠNIRELMAN utilisait l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on a :

$$\frac{\alpha^9.X^{18}}{(\log X)^{18}} \leqslant (\sum r(N))^9 \leqslant M(X)^{18} \sum r^9(N) \leqslant \gamma^9\, M(X)^{18} \sum \left(\prod_{p|N, p\neq 2} \frac{p-1}{p-2}\right)^9 \frac{N^9}{(\log N)^{18}}$$

où les sommes sont étendues aux entiers pairs compris entre $X/256$ et X. La dernière somme se majore de façon élémentaire (mais longue) par $74X^{10}(\log X)^{-18}$. Par un théorème de Khinčin (cf. [3], Chap. I, theorem 20), on déduit des minorations, obtenues pour $M(X)$, le résultat suivant.

PROPOSITION 2. - Tout nombre supérieur à $\exp(465)$ est somme d'au plus 75 nombres premiers ; tout nombre entier supérieur à $\exp(292)$ est somme d'au plus 159 nombres premiers, cette assertion étant obtenue par des moyens entièrement élémentaires.

4. Représentation des "petits entiers".

Nous nous contenterons d'étudier la représentation des petits entiers en somme de nombres premiers dans le cas élémentaire (la méthode employée étant similaire dans le cas analytique ; seules les estimations de $\theta(x)$ étant différentes).

On commence par remarquer, à l'aide de tables de nombres premiers, que tout nombre pair compris entre 4 et 10^3 est somme de deux nombres premiers ; la différence entre deux nombres premiers consécutifs inférieurs à 10^8 étant au plus 500, tout entier inférieur à 10^8 est somme d'au plus quatre nombres premiers. Soit alors L un entier tel que, pour tout x compris entre 10^8 et L, il y ait un nombre premier entre $x - 10^8$ et x ; on saura alors que tout entier inférieur à L est somme d'au plus cinq nombres premiers. En utilisant la minoration de $\theta(x)$ donnée dans [1], et la majoration donnée en [4], et en répétant le processus indiqué ci-dessus, on montrera que tout entier inférieur à $\exp(292)$ est somme d'au plus 159 nombres premiers. En procédant de la même manière avec l'encadrement de $\theta(x)$ fourni par ROSSER et SCHOENFELD, on achève la démonstration du théorème suivant.

THÉORÈME. - Tout entier supérieur à 1 est somme d'au plus 159 nombres premiers; ce résultat est obtenu de façon entièrement élémentaire, et par des arguments de nature analytique, on peut remplacer 159 par 75.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLANCHARD (A.). - Initiation à la théorie analytique des nombres premiers. - Paris, Dunod 1969 (Travaux et Recherches mathématiques, 19).

[2] HALBERSTAM (H.) and RICHERT (K. F.). - Mean-value theorems for a class of arithmetical functions, Acta Arith., Warszawa, t. 18, 1971, p. 243-256.

[3] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - Sequences, Vol 1. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.

[4] HANSON (D.). - On the product of the primes, Canad. Math. Bull., t. 15, 1972, p. 33-38.

[5] KLIMOV (N. I.). - On the computation of Šnirelman's constant, Volž. Mat. Sb. Vyp. , t. 7, 1969, p. 32-40.

[6] ROSSER (J.) and SCHOENFELD (L.). - Approximate formules for some functions of prime numbers, Illinois J. Math., t. 6, 1962, p. 64-94.

[7] SCHNIRELMAN [ŠNIRELMAN] (L.). - Über additive Eigenschaften von Zahlen, Math. Annalen, t. 107, 1933, p. 649-690.

[8] VINOGRADOV (I. M.). - Representation of an odd number as a sum of three primes, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 15, 1937, p. 291-294.

(Texte reçu le 26 juin 1973)

Jean-Marc DESHOUILLERS
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
17 rue Descartes
75005 PARIS

et

E. R. A. au C. N. R. S. n° 362
U. E. R. de Mathematiques et Informatique
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE

Note. - Depuis la date de la conférence, nous avons pu remplacer la constante 75 par 67 , en utilisant le "grand crible" au lieu du "petit crible" pour majorer r(N) (cf. le 2e paragraphe).

[19 juillet 1973]