Martine Pathiaux

Les nombres de Pisot et leurs généralisations

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1972-1973), exp. nº G10, p. G1-G2
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A17_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° G10, 2 p.
15 janvier 1973

LES NOMBRES DE PISOT ET LEURS GÉNÉRALISATIONS

par Martine PATHIAUX

C. PISOT a étudié l'ensemble S des nombres algébriques > 1 , entiers sur $\mathbb{Q}$ dont les conjugués ont une valeur absolue < 1 . Ces nombres ont été généralisés dans différentes directions.

1. Généralisations.

Voir les textes ci-après :

[1] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965, 104 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[2] CANTOR (David G.). - On sets of algebraic integers whose remaining conjugates lie in the unit circle, Trans. Amer. math. Soc., t. 105, 1962, p. 391-406.

[3] CHABAUTY (Claude). - Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 465-466.

[4] DECOMPS-GUILLOUX (Annette). - Généralisation des nombres de Salem aux adèles, Acta Arithm. Warszawa, t. 16, 1970, p. 265-314 (Thèse Sc. math. Paris, 1968).

[5] GRANDET-HUGOT (Marthe). - Ensembles fermés d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 82, 1965, p. 1-35 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[6] GRANDET-HUGOT (Marthe). - Eléments algébriques remarquables dans un corps de séries formelles, Acta Arithm., Warszawa, t. 14, p. 177-184.

[7] GRANDET-HUGOT (Marthe). - P.-V. éléments dans un corps de nombres algébriques, Acta Arithm., Warszawa, t. 20, 1972, p. 203-214.

[8] PISOT (Charles). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., série 3, t. 81, 1964, p. 165-188.

[9] SALEM (Raphael). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.

[10] SENGE (H. G.). - Closed sets of algebraic numbers, Duke math. J., t. 34, 1967, p. 307-323.

2. Propriétés.

L'ensemble S est fermé. SALEM [14] l'a démontré en associant à tout nombre de S une fraction rationnelle bornée par 1 en module sur la circonférence unité.

Il est remarquable que, dans les généralisations, le problème des points limites des ensembles, analogues à S , n'est résolu entièrement que dans l'article de Marthe GRANDET [7], où elle montre que dans ce cas l'ensemble considéré n'est pas fermé, à l'aide d'une caractérisation des coefficients du polynôme minimal associé à ces nombres, et dans [8] et [10], où les ensembles sont fermés, car on a restreint l'ensemble des nombres, qui est une généralisation exacte des nombres de S , au sous-ensemble des nombres auxquels on peut associer une fraction rationnelle bornée sur la circonférence unité.

Par exemple, on ne sait pas si l'ensemble S_q^* des nombres, dont l'inverse est le seul zéro de module ≤ 1, d'un polynôme $Q(x) \in Z[x]$ vérifiant $Q(0) = q$, est fermé ou non.

Or trois résultats permettent de mieux "situer" les polynômes associés aux nombres de Pisot-Salem.

THÉORÈME [12]. - Tout nombre de Pisot-Salem est zéro d'un polynôme de $Z[x]$ dont les coefficients sont majorés par $[\theta]$.

THÉORÈME [11]. - L'inverse d'un nombre de Pisot est zéro d'un polynôme de $Z[x]$ dont le coefficient du terme en x est supérieur strictement à la somme des autres.

THÉORÈME [15]. - Si α est entier algébrique sur Q, si $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont les conjugués de module > 1, et si $\prod_{i=1,\ldots,k} |\alpha_i| < \theta_0$, où θ_0 est le plus petit nombre de S, alors le polynôme est réciproque.

Les deux premiers théorèmes peuvent se généraliser [13] aux nombres définis dans [2] et [8].

Mais il semble que la description des polynômes associés aux nombres de S ne soit pas encore suffisante, et qu'il devrait être possible de mieux les caractériser de façon à lever l'indétermination sur les points limites.

Références.

[11] CONNES (Alain). - Ordres faibles et localisation de zéros de polynômes, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 18, 11 p.

[12] HUGOT (Marthe GRANDET-) et PISOT (Charles). - Sur certains entiers algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 2831-2833.

[13] PATHIAUX (Martine). - Sur les multiples de polynômes irréductibles associés à certains nombres algébriques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 14e année, 1972/73, n° 13, 9 p.

[14] SALEM (Raphael). - Algebraic numbers and Fourier analysis. - Boston, Heath and Company, 1963 (Heath mathematical Monographs).

[15] SMYTH (C. J.). - On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer, Bull. London math. Soc., t. 3, 1971, p. 169-175.

(Texte reçu le 21 septembre 1973)

Martine PATHIAUX
Avenue de Paris
78470 SAINT REMY LES CHEVREUSE