Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Gilles Christol

Introduction aux formes modulaires. Formes modulaires p-adiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, n° 2 (1972-1973), exp. n° G4 et G8, p. G1-G7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A15_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° G4 et G8, 7 p.

13 novembre et 18 décembre 1972

INTRODUCTION AUX FORMES MODULAIRES .
FORMES MODULAIRES p-ADIQUES

par Gilles CHRISTOL

1° Modèle de Weierstrass des courbes elliptiques sur $\underset{\sim}{C}$: Si ω_1 et ω_2 sont deux nombres complexes tels que $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$, le corps des fonctions méromorphes de périodes ω_1 et ω_2 est engendré par $X = \wp(u)$ et $Y = \wp'(u)$, X et Y étant liés par la relation

$$Y^2 = 4X^3 - g_2 X - g_3 ,$$

avec

$$\wp(u) = u^{-2} + \Sigma'[(u - n\omega_1 - m\omega_2)^{-2} - (n\omega_1 + m\omega_2)^{-2}]$$

$$= u^{-2} + \sum_{k=2}^{\infty}(2k - 1)\, G_{2k}\, u^{2k-2}$$

$$G_{2k} = \Sigma'(n\omega_1 + m\omega_2)^{-2k}$$

$g_2 = 60\, G_4$ $g_3 = 140\, G_6$, les Σ' indiquant une sommation sur tous les couples d'entiers $(m,n) \neq (0 , 0)$. Le groupe $\underset{\sim}{C}/\underset{\sim}{Z}\omega_1 + \underset{\sim}{Z}\omega_2$ se trouve ainsi muni d'une structure algébrique (liée à sa structure analytique de surface de Riemann). Nous noterons $E(\omega_1 , \omega_2)$ un tel groupe, et l'appellerons courbe elliptique. Ce sont les seules surfaces de Riemann ayant une structure de groupe.

2° $\omega = dX/Y = du$ est, à constante multiplicative près, l'unique forme différentielle holomorphe sur $E(\omega_1 , \omega_2)$. L'unicité et l'existence d'une telle forme équivalent à E de genre 1 .

3° (ω_1 , ω_2) et (ω_1' , ω_2') définissent la même courbe elliptique si, et seulement si, $\underset{\sim}{Z}\omega_1 + \underset{\sim}{Z}\omega_2$ et $\underset{\sim}{Z}\omega_1' + \underset{\sim}{Z}\omega_2'$ sont identiques, c'est-à-dire si

$$\begin{pmatrix}\omega_1' \\ \omega_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a , b , c , d \in Z \quad \text{et} \quad ad - bc = 1 ,$$

l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, vérifiant ces propriétés, forme le groupe

$$SL(2 , Z)/\{\pm 1\}$$

(le ± 1 venant de la conservation de l'orientation).

4° Si $\lambda \in \underset{\sim}{C}$, la transformation (holomorphe) $u \to \lambda u$ définit, par passage au quotient, un isomorphisme de $E(\omega_1 , \omega_2)$ et $E(\lambda\omega_1 , \lambda\omega_2)$. On vérifie que ce sont les seuls isomorphismes analytiques entre deux courbes elliptiques. $E(\omega_1 , \omega_2)$ est donc ainsi toujours en bijection avec un $E(z , 1)$ avec $z \in H$, H étant le

demi-plan de Poincaré $\mathrm{Im}(z) > 0$. D'après 3°, $E(z' , 1)$ et $E(z , 1)$ seront isomorphes si, et seulement si, $z' = (az + b)/(cz + d)$ pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma = SL(2 , Z)$. On a donc une bijection :

$$H/\Gamma \leftrightarrow \{\text{courbes elliptiques à isomorphisme près}\} .$$

5° Dans l'isomorphisme défini en 4°, les éléments liés à E se transforment comme suit :

$$\omega \text{ -- } \lambda\omega$$
$$g_2 \text{ -- } \lambda^{-4} g_2$$
$$g_3 \text{ -- } \lambda^{-6} g_3$$

Il en résulte que $j = ((12)^3 g_2^3)/(g_2^3 - 27 g_3^2)$ est un invariant dans les isomorphismes de courbes elliptiques. j définit même une bijection :

$$\underset{\sim}{C} \overset{j}{\leftrightarrow} \{\text{courbes elliptiques à isomorphisme près}\} .$$

Remarque. - On peut vérifier que $g_2^3 \neq 27 g_3^2$ pour une courbe elliptique (sinon la courbe a un point double, et est de genre 0).

6° H/Γ n'est pas compact, on le compactifie en ajoutant un point "à l'infini", noté $\{i\,\infty\}$. Une fonction modulaire est une application des courbes elliptiques (à isomorphisme près) dans les complexes qui devient méromorphe sur le compactifié de H/Γ par la bijection du 4°. C'est donc une fonction méromorphe sur $H \cup \{i\,\infty\}$ (pour la méromorphie en $\{i\,\infty\}$ voir 8°) vérifiant :

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = f(z) \quad \text{pour tout} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2 , Z)$$

le compactifié de H/Γ est une surface de Riemann de genre 0 , le corps des fonctions modulaires est donc $\underset{\sim}{C}(j)$.

7° Une forme modulaire de poids k est une application de l'ensemble des couples (E , ω) formé d'une courbe elliptique et d'une forme différentielle holomorphe associée (voir 2°) dans les complexes, homogène de poids $-k$ en λ (de sorte que $f(E , \omega)\, \omega^k$ soit un invariant de E), holomorphe si on la considère comme fonction sur $H \cup \{i\,\infty\}$ (c'est-à-dire si on se restreint aux courbes $E(z , 1)$). En tant que fonction sur H , une forme modulaire vérifie la condition :

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^{-k} f(z) .$$

Les formes modulaires sont les polynômes en g_2 et g_3 , homogènes pour le poids (poids de $g_2 = 4$, poids de $g_3 = 6$).

8° Les formes ou fonctions modulaires, considérées comme fonctions sur H , sont périodiques, de période 1 (en prenant $a = b = d = 1$, $c = 0$), elles se développent donc en série de Fourier, c'est-à-dire en série de Laurent en $q = \exp 2i\pi z$;

q est l'uniformisante locale en $\{i\,\infty\}$; être méromorphe en $\{i\,\infty\}$ signifiera n'avoir qu'un nombre fini de termes d'exposant négatif dans son développement ; être holomorphe signifiera n'avoir aucun terme d'exposant négatif dans ce développement. On a, par exemple,

$$j = \frac{1}{q} + 744 + \Sigma\, c(n)\, q^n ,$$

$$\Delta = (2\pi)^{12}\,(g_2^3 - 27g_3^2) = q \prod_1^\infty (1 - q^n)^{24} = \Sigma\, \tau(n)\, q^n ,$$

$$G_{2k} = 2\zeta(k)\, E_{2k} ,$$

$$E_k = 1 - \frac{2k}{b_k} \Sigma_n\, \sigma_{k-1}(n)\, q^n , \quad \sigma_k(n) = \Sigma_{d|n}\, d^k ,$$

où b_k est le k-ième nombre de Bernoulli :

$$\zeta(1 - k) = \frac{-b_k}{k} = \frac{2\zeta(k)(k - 1)!}{(2\pi i)^k} .$$

9° Opérateurs de Hecke : E définit un recouvrement d'ordre p de E_p si le réseau, qui définit E_p, contient celui qui définit E comme sous-réseau d'ordre p. Si p est un nombre premier, on trouve qu'il n'y a que $p + 1$ courbes E_p dont E soit un recouvrement d'ordre p. f étant alors une forme modulaire, on définit l'opérateur T_p par

$$T_p(f)(E\ ,\ \omega) = \frac{1}{p} \Sigma\, f(E_p\ ,\ \omega) ,$$

où la forme différentielle ω est définie sur E_p par restriction à partir de E. $T_p(f)$ est alors une forme de même poids que f.

Si on part de la courbe $E(z\ ,\ 1)$, les E_p sont les courbes $E(z\ ,\ 1/p)$, $E(\frac{z + i}{p}\ ,\ 1)$ pour $0 \leqslant i < p$. En considérant alors f comme une fonction de z, on trouve

$$p\, T_p(f)(z) = \Sigma_{i=0}^{p-1}\, f(\frac{z + i}{p}) + p^k\, f(pz) ,$$

par suite, en notant $a(n)$ les coefficients de Fourier de f, et $b(n)$ ceux de $T_p(f)$, on trouve

$$b(n) = a(np) + p^{k-1}\, a(n/p) \qquad (a(s) = 0 \text{ si } s \notin Z) .$$

10° D'après ce qui précède, si une forme est vecteur propre de tous les T_p, les valeurs propres associées sont les $a(p)$. On remarque que les E_k sont effectivement vecteurs propres de tous les T_p, de plus, PETERSSON, en munissant d'un produit scalaire les formes de poids k nulles à l'infini, a montré que l'on peut trouver une base de l'espace des formes de poids k (espace de dimension finie) formée de vecteurs propres pour tous les T_p.

11° Si on fait la transformation "naïve"

$$\Sigma_{n=0}^\infty\, a(n)\, q^n \leftrightarrow \Sigma_{n=1}^\infty\, a(n)/n^s ,$$

un vecteur propre de tous les T_p devient une série de Dirichlet, munie d'un pro-

duit d'Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, n^{-s} = \prod_p \frac{1}{1 - a(p)\, p^{-s} + p^{k-1-2s}} .$$

Supposons donnés une suite de $a(n) = 0(n^c)$ pour un $c > 0$ (ce qui est le cas si les $a(n)$ sont les coefficients de Fourier d'une forme modulaire), et un nombre $k > 0$; posons

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, n^{-s} ,$$

$$\Phi(s) = (2\pi)^{-s}\, \Gamma(s)\, \varphi(s) ,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \exp 2\pi i n z ,$$

alors les conditions (A) et (B) suivantes sont équivalentes :

(A) $\Phi(s) + \frac{a(0)}{s} + \frac{\pm\, a(0)}{k - s}$ se prolonge en une fonction entière bornée sur toute bande verticale, et satisfait

$$\Phi(k - s) = \pm\, \Phi(s) .$$

(B) $f(-1/z) = \pm\, (z/i)^k\, f(z)$.

Ce théorème peut se résumer en disant qu'à une forme modulaire on associe une fonction vérifiant une certaine équation fonctionelle.

Par exemple, à G_k correspond $\zeta(s)\, \zeta(s + 1 - k)$.

12° Sous-groupe de congruence : le sous-groupe de $E(\omega_1 , \omega_2)$ des points d'ordre p est formé des points $(r\omega_1 + s\omega_2)/p$ pour $0 \leqslant r < p$, $0 \leqslant s < p$.

On définit ainsi un isomorphisme de ce groupe dans $\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z} \times \underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$. Cet isomorphisme n'est pas indépendant du choix du couple (ω_1 , ω_2) qui représente la courbe elliptique, il est cependant conservé dans l'isomorphisme défini au 4°. On peut alors considérer des formes plus générales, qui sont des fonctions sur les courbes elliptiques, munies d'un isomorphisme du groupe de leurs points d'ordre p dans $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^2$. En se ramenant à la variable $z = \omega_1/\omega_2$, on trouve que de telles formes vérifient

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^{-k}\, f(z) ,$$

pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2 , Z)$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod p$ (le groupe de telles matrices se note $\Gamma(p)$).

Parmi ces formes, il est intéressant de considérer celles qui ne dépendent que du choix d'une des deux projections des points d'ordre p sur $\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$, c'est-à-dire qui sont des fonctions sur les courbes elliptiques munies d'un sous-groupe d'ordre p du groupe des points d'ordre p (noyau de la projection ci-dessus).

Pour la variable z et le sous-groupe engendré par $\frac{\omega_2}{p}$, on trouve ainsi les formes qui sont conservées par $\Gamma_0(p)$ c'est-à-dire par les matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2 , Z)$$

telles que $c = 0 \pmod p$. En particulier, l'ensemble des fonctions (formes de poids 0) invariantes par $\Gamma_0(p)$ est le corps $C(j , j')$ avec $j'(z) = j(pz)$.

13° Formes modulaires p-adique : Avec les notations du 8°, l'équation du modèle de Weierstrass de la courbe devient

$$Y^2 = 4X^3 - \frac{(2\pi)^4}{12} E_4 X - \frac{(2\pi)^6}{216} E_6 ,$$

$$E_4 = 1 + 240 \Sigma \sigma_3(n) q^n ,$$

$$E_6 = 1 - 504 \Sigma \sigma_5(n) q^n .$$

E_4 et E_6 sont donc à coefficients entiers. On peut alors "améliorer" le résultat du 7° : p étant un nombre premier différent de 2 et 3 , un nombre est dit p-entier s'il est dans Q , et si son dénominateur n'est pas divisible par p .

Une forme modulaire a des coefficients de Fourier p-entiers si, et seulement si, c'est un polynôme (isobare) à coefficients p-entiers en E_4 et E_6 . En particulier, la forme E_{p-1} de poids $p - 1$ s'exprime comme un polynôme $A(E_4 , E_6)$.

SWINNERTON-DYER, d'autre part, a prouvé qu'un polynôme à coefficients p-entiers, en E_4 et E_6 , représente une forme modulaire à coefficients de Fourier nuls, modulo p , si, et seulement si, il est divisible, modulo p , par le polynôme $A - 1$. Comme conséquence de ce résultat, on peut démontrer que deux formes modulaires, à coefficients de Fourier p-entiers, égales modulo p , ont des poids égaux modulo $p^{\alpha-1}(p - 1)$. (On commence par montrer que si $f = g \pmod p$, alors $f = gA^h$, puis on vérifie que h doit être divisible par $p^{\alpha-1}$).

On dira qu'une série $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, à coefficients a_n dans Z_p , est une forme modulaire p-adique si, pour tout α , il existe une forme modulaire f_α de poids k_α à coefficients p-entiers, telle que $f = f_\alpha$ modulo p ; le poids de f sera un élément de

$$\lim Z/(p - 1) p^\alpha Z = Z/(p - 1) Z \times Z_p ,$$

défini par la limite de k_α .

14° Si f est une forme modulaire de poids k pour le groupe $\Gamma_0(p)$, à coefficients p-entiers, f est une forme modulaire p-adique de poids l'image de k dans le groupe $Z/(p - 1) Z \times Z_p$. Pour démontrer cela, on pose

$$Tr(f) = \sum_\gamma 1(.z + .)^{-k} f(\gamma z) ,$$

où γ parcourt un système de représentant de $\Gamma_0(p)\backslash SL(2 , Z)$; on peut vérifier que $Tr(f)$ est une forme pour SL_2 ; d'autre part, on note

$$E^*_{p-1}(z) = E_{p-1}(z) - p^{p-2} E_{p-1}(pz) ,$$

il est facile de vérifier que E^*_{p-1} est une forme pour $\Gamma_0(p)$, et est congrue à 1 modulo p . La suite $Tr(f E^*_{p-1} p^\alpha)$ fournit alors une suite de formes de poids $k + p^\alpha(p - 1)$ qui tend p-adiquement vers f .

15° Si K est un corps quelconque, un point (x , y , z) de l'espace projectif à deux dimensions sur K appartient à la courbe elliptique $E(K , g_2 , g_3)$ (ou plus simplement $E(K)$), g_2 et g_3 appartenant à K , $g_2 \neq 27 g_3$, si

$$y^2 z = 4x^3 - g_2 xz^2 - g_3 z^3 .$$

On peut munir l'ensemble des points de $E(K)$ d'une loi de groupe abélien d'élément neutre le point $(0 , 1 , 0)$, appelé point à l'infini (on définit cette loi par : Trois points ont une somme nulle s'ils sont alignés).

Si K est algébriquement clos, de caractéristique 0, le sous-groupe de $E(K)$, des points d'ordre p , est d'ordre p^2 .

K sera un corps valué (valuation réelle), d'anneau de valuation $\mathfrak{a}$, d'idéal de valuation $\mathfrak{M}$, de corps des restes k que l'on suppose de caractéristique p $(\geqslant 5)$, on note $\bar{a}$ l'image d'un élément a de $\mathfrak{a}$ dans k . On appellera réduite de $E(K , g_2 , g_3)$, la courbe $E(k , \bar{g}_2 , \bar{g}_3)$. Si la courbe obtenue est de genre 0 ($g_2 - 27 g_3$ dans $\mathfrak{M}$) , on dit qu'il y a mauvaise réduction ; si elle est de genre 1 , il y a bonne réduction.

Un point de $E(K)$ ayant toujours une représentation (x , y , z) avec x , y , z dans $\mathfrak{a}$, et non tous dans $\mathfrak{M}$, se réduit en $(\bar{x} , \bar{y} , \bar{z})$.

16° Considérons le sous-groupe M de $E(K)$ des points donnant par réduction le point à l'infini de $E(k)$, ce sont ceux tels que $v(y) < \inf(v(x) , v(z))$; pour ces points, la fonction sur $E(K)$, $t = x/y$, prend des valeurs dans $\mathfrak{M}$; inversement, pour tout t de $\mathfrak{M}$, il existe un point, et un seul, (x , y , z) dans M tel que $t = x/y$.

Si P et Q sont des points de M , on a donc

$$t(P + Q) = F(t(P) , t(Q)) = \Sigma a_{n,m} t(P)^n t(Q)^m$$

On montre que les $a_{n,m}$ sont dans A , et que la série formelle $F(X , Y)$ vérifie

(a) $\qquad F(X , Y) = X + Y +$ termes de degré $\geqslant 2$ en X et Y

(b) $\qquad F(X , F(Y , Z)) = F(F(X , Y) , Z)$,

qui traduit l'associativité du groupe.

(c) $\qquad F(X , Y) = F(Y , X)$,

qui traduit la commutativité.

Une série formelle à 2 variables, vérifiant (a), (b), (c), est appelée groupe formel à coefficients dans $\mathfrak{a}$.

17° A partir d'un groupe formel, on définit par récurrence les séries formelles (à une variable) à coefficients dans A :

$$[n]_F = F(X , [n - 1]_F X) \qquad [1] X = X ;$$

en particulier, si P est dans M, il est clair que

$$[n]_F\, t(P) = t(nP)$$

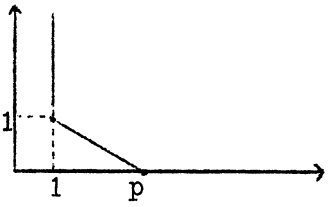
(avec des notations évidentes).

Il est clair que la série formelle

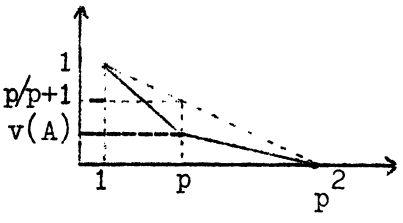
$$\overline{F}_{(X,Y)} = \Sigma\, \overline{a}_{n,m}\, X^n\, Y^m$$

définit un groupe formel, à coefficients dans k ; or on sait que pour un tel groupe formel, $[p]_F X$ est une série en X^p, commençant, pour un certain h, appelé hauteur, par un terme en X^{p^h}. Il en résulte que $[p]_F = AX^p + \ldots$ modulo $\mathfrak{M}$, A est appelé invariant de Hasse de la courbe $E(K)$.

18° Nous supposons maintenant que K est algébriquement clos, et de caractéristique 0. Les points d'ordre p de $E(K)$, qui sont dans M, correspondent (d'après (d'après 15° et 16°) aux racines de l'équation $[p]_F X$ qui sont dans $\mathfrak{M}$. Nous allons donc tracer le polygone de Newton de cette série (dont le premier terme est px), deux cas se présentent :



Si $v(A) = 0$, on voit que la série $[p]_F X$ a p racines de valuation positive. Ces p points (dont le point à l'infini correspondant à $t = 0$) forment un sous-groupe canonique des points d'ordre p de $E(K)$. La courbe $E(k)$ a alors p points d'ordre p.



Si $v(A) > 0$, $E(K)$ ayant p^2 point d'ordre p, le groupe formel F ne peut être que de hauteur 2 (et donc $E(k)$ n'a que l'origine comme point d'ordre p). On peut tout de même vérifier que $E(K)$ conserve un sous-groupe "canonique" si $v(A) < p/(p+1)$, cette limite est d'ailleurs "non améliorable".

19° On peut montrer que A est le coefficient de x^{p-1} dans le polynôme

$$(4x^3 - g_2\, x - g_3)^{(p-1)/2}\ .$$

Si on considère la courbe $E(\underset{\sim}{Q}[[q]]\ ,\ E_4/12\ ,\ E_6/216)$, il est facile de voir que A est une forme modulaire (c'est-à-dire un polynôme à coefficients entiers en E_4 et E_6), de poids $p - 1$; on peut voir que $A = 1$ modulo p, et par conséquent (miracle des notations) que l'invariant de Hasse A est le polynôme A du 13°, c'est-à-dire E_{p-1} (mod p). Dans ce cas, A est bien inversible, et la courbe est munie d'un sous-groupe canonique ; les fonctions sur $(E\ ,\ \omega)$ sont donc aussi des fonctions sur $(E\ ,\ \omega\ ,$ sous-groupe de point d'ordre $p)$, ce qui explique les résultats du 14°.

Gilles CHRISTOL
Résidence "Bois des Roches"
Bâtiment 29, Escalier 1
91240 SAINT MICHEL SUR ORGE

(Texte reçu le 8 janvier 1973)