Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Roger Paysant-Le Roux

Introduction à l’algorithme de Jacobi-Perron

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1972-1973), exp. nº G6, p. G1-G7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A13_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° G6, 7 p.

4 décembre 1972

INTRODUCTION À L'ALGORITHME DE JACOBI-PERRON

par Roger PAYSANT - LE ROUX

1. Construction de l'algorithme.

Pour la détermination du p. g. c. d. de deux nombres naturels x , y , on se sert de l'algorithme d'Euclide, ce qui donne aussi le développement de y/x en fraction continue. Pour avoir un algorithme plus général, on part de la recherche du p. g. c. d. de $n+1$ nombres naturels donnés : x_0 , x_1 , ... , x_n

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = a_1\, x_0 + x'_0 \\ x_2 = a_2\, x_0 + x'_1 \\ \cdots \\ x_n = a_n\, x_0 + x'_{n-1} \\ x_0 = x'_n \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_1 = a'_1\, x'_0 + x''_0 \; \cdots \\ x'_2 = a'_2\, x'_0 + x''_1 \\ \cdots \\ x'_n = a'_n\, x'_0 + x''_{n-1} \\ x'_0 = x''_n \end{cases}$$

$$0 \leqslant x'_0 < x_0 \qquad\qquad 0 \leqslant x''_0 < x'_0 \; \cdots$$

x_0 , x'_0 , x''_0 , ... est une suite strictement décroissante d'entiers positifs, nous aurons à un certain rang t , $x_0^t = 0$.

Le même procédé doit alors être poursuivi, avec moins de $n+1$ nombres, jusqu'à ce que l'on ait deux nombres et, dans ce cas, il est identique à l'algorithme d'Euclide.

Nous pouvons écrire le système (1) de la façon suivante :

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{x_1}{x_0} = a_1 + \dfrac{x'_0}{x'_n} \\ \alpha_2 = \dfrac{x_2}{x_0} = a_2 + \dfrac{x'_1}{x'_n} \\ \cdots \\ \alpha_n = \dfrac{x_n}{x_0} = a_n + \dfrac{x'_{n-1}}{x'_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha'_1 = \dfrac{x'_1}{x'_0} = a'_1 + \dfrac{x''_0}{x''_n} \\ \alpha'_2 = \dfrac{x'_2}{x'_0} = a'_2 + \dfrac{x''_1}{x''_n} \\ \cdots \\ \alpha'_n = \dfrac{x'_n}{x'_0} = a'_n + \dfrac{x''_{n-1}}{x''_n} \end{cases}$$

ou bien au rang ν ,

$$\begin{cases} \alpha_1^\nu = a_1^\nu + \dfrac{1}{\alpha_n^{\nu+1}} \quad , \quad a_1^\nu = [\alpha_1^\nu] \\ \alpha_2^\nu = a_2^\nu + \dfrac{\alpha_1^{\nu+1}}{\alpha_n^{\nu+1}} \quad , \quad a_2^\nu = [\alpha_2^\nu] \\ \cdots \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \alpha_n^\nu = a_n^\nu + \dfrac{\alpha_{n-1}^{\nu+1}}{\alpha_n^{\nu+1}} \quad , \quad a_n^\nu = [\alpha_n^\nu] \end{cases}$$

où les (a_i^ν) vérifient la condition :

$$(3) \qquad (a_n^\nu , a_{n-1}^{\nu+1} , \ldots , a_{n-1}^{\nu+i}) \geqslant (a_i^\nu , a_{i-1}^{\nu+1} , \ldots , a_1^{\nu+i-1} , 1) ,$$

où $\geqslant$ note l'ordre lexicographique.

2. Développement formel.

Nous définissons des suites d'entiers $\{A_i^\nu\}_\nu$ $(i = 0 , 1 , \ldots , n)$ par les formules de récurrence suivantes :

$$(4) \quad A_i^\nu = 0 \quad (\nu \neq i , \quad \nu \leqslant n) , \quad A_i^i = 1 , \quad A_i^{\nu+n+1} = A_i^\nu + a_1^\nu . A_i^{\nu+1} + \ldots + a_n^\nu . A_i^{\nu+n}$$

$i = 0 , 1 , \ldots , n ;$ $\nu = 0 , 1 , 2 , \ldots$

Pour tout entier $\nu \geqslant 0$, nous avons

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} A_0^\nu , & A_0^{\nu+1} , & \ldots , & A_0^{\nu+n} \\ A_1^\nu , & A_1^{\nu+1} , & \ldots , & A_1^{\nu+n} \\ \ldots & & & \\ A_n^\nu , & A_n^{\nu+1} , & \ldots , & A_n^{\nu+n} \end{vmatrix} = (-1)^{n\nu}$$

$$(6) \qquad \alpha_i = \frac{A_i^\nu + \alpha_1^\nu A_i^{\nu+1} + \ldots + \alpha_n^\nu A_i^{\nu+n}}{A_0^\nu + \alpha_1^\nu A_0^{\nu+1} + \ldots + \alpha_n^\nu A_0^{\nu+n}} \quad (i = 1 , 2 , \ldots , n)$$

$$(7) \qquad \begin{cases} \alpha_n^1 \ldots \alpha_n^\nu = A_0^\nu + \alpha_1^\nu A_0^{\nu+1} + \ldots + \alpha_n^\nu A_0^{\nu+n} \\ \alpha_i . \alpha_n^1 \ldots \alpha_n^\nu = A_i^\nu + \alpha_1^\nu A_i^{\nu+1} + \ldots + \alpha_n^\nu A_i^{\nu+n} \quad (i = 1 , 2 , \ldots , n) . \end{cases}$$

3. Interruption.

L'algorithme, défini par le système (1), est appelé algorithme de Jacobi-Perron (noté A. J. P.) ; il peut être continué "sans interruption" aussi longtemps qu'aucun nombre entier n'apparaisse pour α_1^ν ; si au rang ν_1 , $\alpha_1^{\nu_1} \in \mathbb{Z}$, alors on continue l'algorithme avec les nombres $\alpha_2^{\nu_1} , \ldots , \alpha_n^{\nu_1}$.

THÉORÈME 1. - Si l'algorithme de Jacobi-Perron a m interruptions, alors il existe au moins m relations indépendantes à coefficients dans l'anneau des entiers entre le système $(1 , \alpha_1 , \ldots , \alpha_n)$:

$$\exists P_i^{(k)} \in \mathbb{Z} \ \text{tels que} \ P_0^{(k)} + P_1^{(k)} \alpha_1 + \ldots + P_n^{(k)} \alpha_n = 0 \quad (k = 1 , \ldots , m) .$$

Démonstration. - Après m interruptions, on a :

$$\alpha_i = \frac{A_i^{\nu+m} + \alpha_{m+1}^\nu A_i^{\nu+m+1} + \ldots + \alpha_n^\nu A_i^{\nu+n}}{A_0^{\nu+m} + \alpha_{m+1}^\nu A_0^{\nu+m+1} + \ldots + \alpha_n^\nu A_0^{\nu+n}} \quad (i = 1 , \ldots , n)$$

$$A_i^{\nu+n+1} = A_i^{\nu+m} + a_{m+1}^\nu A_i^{\nu+m+1} + \ldots + a_n^\nu A_i^{\nu+n} \quad (i = 0 , 1 , \ldots , n) \quad \forall \nu > \nu_1 ;$$

ν_1 étant le rang correspondant à la dernière interruption, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{m-i} , & A_{m-i}^{\nu+m} , & \ldots , & A_{m-i}^{\nu+n} \\ \alpha_m , & A_m^{\nu+m} , & \ldots , & A_m^{\nu+n} \\ \ldots & & & \\ \alpha_n , & A_n^{\nu+m} , & \ldots , & A_n^{\nu+n} \end{vmatrix} = \frac{1}{A_0^{\nu+m-1} + A_0^{\nu+m}.\alpha_{m+1}^{\nu-1} + \ldots + A_0^{\nu+n-1}.\alpha_n^{\nu-1}}$$

$$\times \begin{vmatrix} A_{m-i}^{\nu+m-1} + A_{m-i}^{\nu+m}.\alpha_{m+1}^{\nu-1} + \ldots + A_{m-i}^{\nu+n-1}.\alpha_n^{\nu-1} , & A_{m-i}^{\nu+m} , & \ldots , & A_{m-i}^{\nu+n} \\ A_m^{\nu+m-1} + A_m^{\nu+m}.\alpha_{m+1}^{\nu-1} + \ldots + A_m^{\nu+n-1}.\alpha_n^{\nu-1} , & A_m^{\nu+m} , & \ldots , & A_m^{\nu+n} \\ \ldots & & & \\ A_n^{\nu+m-1} + A_n^{\nu+m}.\alpha_{m+1}^{\nu-1} + \ldots + A_n^{\nu+n-1}.\alpha_n^{\nu-1} , & A_n^{\nu+m} , & \ldots , & A_m^{\nu+n} \end{vmatrix} = 0$$

$(i = 0 , 1 , \ldots , m - 1)$.

4. Convergence des "réduites".

THÉORÈME 2. - On a :

$$\lim_{\nu\to+\infty} \frac{A_i^\nu}{A_0^\nu} = \alpha_i \quad (i = 1 , \ldots , n) . \tag{8}$$

Remarques.

1° On n'a pas, en général, $\lim_{\nu\to+\infty}(A_i^\nu - \alpha_i A_0^\nu) = 0$;

2° Dans le cas $n = 2$, on montre que $A_i^\nu - \alpha_i A_0^\nu$ est borné.

5. Unicité du développement.

THÉORÈME 3. - Soient

$$(a_1^\nu , \ldots , a_n^\nu)_{\nu\in\underset{\sim}{N}}$$
$$(b_1^\nu , \ldots , b_n^\nu)_{\nu\in\underset{\sim}{N}}$$

deux tableaux de nombres entiers positifs vérifiant la condition (3). Si on construit, à partir des a_i^ν (resp. b_i^ν), les suites $\{A_i^\nu\}$ (resp. $\{B_i^\nu\}$) par la formule (4), et si on a :

$$\lim_{\nu\to+\infty} \frac{A_i^\nu}{A_0^\nu} = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{B_i^\nu}{B_0^\nu} ,$$

alors $a^\nu = b^\nu$ $(i = 1 , \ldots , n ; \ \nu \geqslant 0)$.

6. Développement périodique.

(a) Equation caractéristique.

Définition. - On dit qu'un développement est périodique si la suite $(a_1^\nu,\ldots,a_n^\nu)_{\nu\in\underset{\sim}{N}}$

est périodique, à partir d'un certain rang λ .

On supposera $\lambda = 0$, et la longueur d'une période k .

Posons $\rho_0 = \alpha_n^0 \dots \alpha_n^{k-1}$, alors

$$(9) \qquad \begin{cases} \rho_0 = \alpha_n^0 \dots \alpha_n^{k-1} = A_0^k + \alpha_1 A_0^{k+1} + \dots + \alpha_n A_0^{k+n} \\ \rho_0 \alpha_i = A_i^k + \alpha_1 A_i^{k+1} + \dots + \alpha_n A_i^{k+n} \end{cases}$$

les équations (9) montrent que ρ_0 est valeur propre de la matrice

$$(A_i^{k+j})_{j=0,1,\dots,n,i=0,1,\dots,n}$$

et que $(1 , \alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre ρ_0 .

ρ_0 vérifie l'équation

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} A_0^k - \rho , & A_0^{k+1} , & \dots , & A_0^{k+n} \\ A_1^k , & A_1^{k+1} - \rho , & \dots , & A_1^{k+n} \\ \dots & & & \\ A_n^k , & A_n^{k+1} , & \dots , & A_n^{k+n} - \rho \end{vmatrix} = 0 ,$$

appelée <u>équation caractéristique</u>.

THÉORÈME 4. - <u>L'équation caractéristique admet au moins une racine positive, sa plus grande racine positive est simple, et c'est</u> ρ_0 .

Soient $g_{\lambda,i}(\rho_0)$ les cofacteurs de la matrice $(A_i^{k+j})_{i,j} - \rho_0 I$, alors le vecteur $(g_{\lambda,0}(\rho_0) , g_{\lambda,1}(\rho_0) , \dots , g_{\lambda,n}(\rho_0))$ est vecteur propre, on a donc

$$(11) \qquad \alpha_i = \frac{g_{\lambda,i}(\rho_0)}{g_{\lambda,0}(\rho)} \quad (i = 1 , \dots , n)$$

et

$$K = \mathbb{Q}(\alpha_1 , \dots , \alpha_n) \subset \mathbb{Q}(\rho_0) .$$

Par (9), on aura l'inclusion en sens inverse, d'où l'égalité

$$(12) \qquad K = \mathbb{Q}(\rho_0) .$$

D'après (10), ρ_0 est une unité de K .

Une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme caractéristique soit irréductible est que $(1 , \alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

<u>Remarque</u>. - Dans le cas d'un développement périodique (donc sans interruption), $(1 , \alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ ne sont pas toujours $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants (voir développement périodique à une seule ligne § 7) sauf pour $n = 2$.

Cas $n = 2$.

$$f(\rho) = \begin{vmatrix} A_0^k - \rho , & A_0^{k+1} , & A_0^{k+2} \\ A_1^k , & A_1^{k+1} - \rho , & A_1^{k+2} \\ A_2^k , & A_2^{k+1} , & A_2^{k+2} - \rho \end{vmatrix} = - \rho^3 + \rho^2 (A_0^k + A_1^{k+1} + A_2^{k+2}) + \rho(\dots) + 1 = 0 ,$$

d'où

$$|\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2| = 1 , \quad \rho_0 = \alpha_2 \ \alpha_2^1 \dots \alpha_2^{k-1} = A_0^k + \alpha_1 \ A_0^{k+1} + \alpha_2 \ A_0^{k+2} > 1$$

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 = A_0^k + A_1^{k+1} + A_2^{k+2}$$

$$\rho_1 + \rho_2 = (A_1^{k+1} - \alpha_1 \ A_0^{k+1}) + (A_2^{k+2} - \alpha_2 \ A_0^{k+2}) .$$

De même,

$$\rho_1^\nu + \rho_2^\nu = (A_1^{\nu k+1} - \alpha_1 \ A_0^{\nu k+1}) + (A_2^{\nu k+2} - \alpha_2 \ A_0^{\nu k+2}) ,$$

d'où

$$|\rho_1^\nu + \rho_2^\nu| < \text{Cte} , \quad \forall \ \nu \quad \text{et} \quad |\rho_1 \ \rho_2| < 1 ,$$

ce qui entraîne

$$|\rho_1| \quad \text{et} \quad |\rho_2| < 1 .$$

(b) Degré d'approximation par les "réduites".

THÉORÈME 5 (PERRON). - Soient $\rho_0 , \rho_1 , \dots , \rho_n$ les racines de l'équation caractéristique, et $|\rho_1| = \max_{i=1,\dots,n} |\rho_i|$, alors on a

$\exists \ C , \ \forall \ \varepsilon > 0 , \ \forall \ \nu \geqslant 0 , \ \forall \ \lambda = 0 , 1 , \dots , k - 1$;

$$|A^{\nu k+\lambda} - \alpha_i \ A^{\nu k+\lambda}| < C |\rho_1|^\nu \ (1 + \varepsilon)^\nu \quad (i = 1 , \dots , n) .$$

Par contre, pour au moins un des nk couples (i , λ) , il existe une constante C' telle que l'inégalité suivante

$$|A_i^{\nu k+\lambda} - \alpha_i \ A_0^{\nu k+\lambda}| > C' |\rho_1|^\nu$$

soit vérifiée pour une infinité de valeurs de ν .

COROLLAIRE 1. - Si le développement est périodique, $(\lim_{\nu\to+\infty} (A_i^\nu - \alpha_i \ A_0^\nu) = 0)$ $\iff$ (l'équation caractéristique est irréductible et admet un nombre de Pisot pour racine).

COROLLAIRE 2. - Si le polynôme caractéristique est irréductible et admet un nombre de Pisot pour racine, alors les suites

$$\left\{ \begin{matrix} A_i^{\nu k+\lambda} \\ \dots \\ A_0^{\nu k+\lambda} \end{matrix} \right\}_\nu \quad (i = 1 , \dots , n)$$

sont des approximations rationnelles simultanées régulièrement réparties.

Si on examine sous quelles conditions on a l'approximation

$$|A_i^{\nu} - \alpha_i \, A_0^{\nu}| < C(A_0^{\nu})^{1/n} \quad (\nu \geqslant 0) \quad (i = 1 \, , \, \dots \, , \, n) \, ,$$

on montre que celle-ci n'est possible que dans les cas $n = 1$ et $n = 2$, avec la condition restrictive que les conjugués de α_1 , α_2 soient complexes.

7. Développement périodique à une seule ligne.

Soient $(a_1 , a_2 , \dots , a_n)$ des entiers positifs vérifiant la condition

$(a_n , a_{n-1} ,\dots, a_{n-i}) \geqslant (a_i , a_{i-1} ,\dots, a_1 , 1)$; $i = 0 , 1 ,\dots, n-1$ $(a_0 = 1)$ ($\geqslant$ notant ici l'ordre lexicographique).

Les n nombres réels $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n$ admettent le développement purement périodique à une seule ligne $(a_1 , \dots , a_n)$ si, et seulement si, les nombres α_i sont donnés par les égalités :

$$(13) \qquad \begin{cases} \alpha_n = \rho_0 \\ \alpha_{n-1} = \rho_0^2 - a_n \, \rho_0 \\ \dots \\ \alpha_1 = \rho_0^n - a_n \, \rho_0^{n-1} - \dots - a_2 \, \rho_0 \end{cases}$$

où ρ_0 est la racine positive de l'équation

$$(14) \qquad f(\rho) = \rho^{n+1} - a_n \, \rho^n - \dots - a_1 \, \rho - 1 = 0 \, .$$

Si, de plus, $a_n > a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + 1$ alors la racine positive ρ_0 de l'équation (14) est un nombre de Pisot, et $f(\rho)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

8. Développement périodique à $n + 1$ lignes.

Soit l'équation

$$(15) \qquad g(x) = x^{n+1} - a_n \, x^n - \dots - a_1 \, x - \frac{a_0}{b_0} = 0$$

où les nombres a_i $(i = 0 , 1 , \dots , n)$ et b_0 sont des entiers positifs tels que :

$$a_0 | a_i \quad (i = 1 , \dots , n) \quad \text{et} \quad (a_0 , b_0) = 1 \, .$$

Posons $c_0 = a_0/b_0$. Soit α la racine positive de l'équation $g(x) = 0$, et considérons les n nombres

$$(16) \qquad \begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \alpha_{n-1} = \alpha^2 - a_n \, \alpha \\ \dots \\ \alpha_1 = \alpha^n - a_n \, \alpha^{n-1} - \dots - a_2 \, \alpha \end{cases}$$

alors, dans les deux cas suivants

(α) $c_0 > 1$ et $\begin{cases} a_n > a_i \\ a_n > c_0 \end{cases}$ $(i = 1 , \dots , n)$,

(β) $c_0 < 1$ et $c_0\, a_n \geqslant a_i + 1$ $(i = 1 , \dots , n)$,

le système de nombres $(\alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ admet un développement, par l'A. J. P., purement périodique de longueur $n + 1$, la période étant :

$$\begin{bmatrix} a_1 , a_2 , \dots , a_n \\ \dfrac{a_1}{c_0} , \dfrac{a_2}{c_0} , \dots , \dfrac{a_n}{c_0} \\ \ddots \\ \dfrac{a_1}{c_0} , a_2 , \dots , a_n \end{bmatrix}$$

De plus, dans les deux cas

(α') $c_0 > 1$ et $a_n \geqslant a_{n-1} + \dots + a_1 + c_0 + 1$

(β') $c_0 < 1$ et $c_0\, a_n \geqslant a_{n-1} + \dots + a_1 + 2c_0 + 1$

le polynôme g est irréductible sur $\underset{\sim}{Q}$.

Le polynôme caractéristique du développement est irréductible sur $\underset{\sim}{Q}$, et admet un nombre de Pisot pour racine, il est donné par le déterminant suivant :

$$f(\rho) = \begin{vmatrix} c_0(1 - \rho) , a_1 , a_2 , \dots , a_n \\ a_n\, c_0\, \rho , c_0(1 - \rho) , a_1 , \dots , a_{n-1} \\ \dots \\ a_1\, c_0\, \rho , a_2\, c_0\, \rho , a_3\, c_0\, \rho , \dots , c_0(1 - \rho) \end{vmatrix}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNSTEIN (L.). - Periodical continued fractions for irrationals of degree n by Jacobi's algorithm, J. für reine und angew. Math., t. 213, 1964, p. 31-38.

[2] JACOBI (C. G. J.). - Allgemeine Theorie der Kettenbruchähnlichen Algorithm, in welchen jede Zahl aus drei vorherfehenden gebildet wird, J. für reine und angew. Math., t. 69, 1868, p. 29-64.

[3] PERRON (O.). - Grundlagen für eine theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus, Math. Annalen, t. 64, 1907, p. 1-76.

[4] SCHWEIGER (F.). - Etude métrique de l'A. J. P., Österr. Akad. Wiss, Math. naturw. Klass., Abt. II, t. 173, 1964, p. 59-92.

[5] STENDER (H. J.). - Explizite Bestimmung von Einheiten für einige Klassen algebraischer Zahlkörper, Dissertation Köln Universität, 1970.

Roger PAYSANT - LE ROUX
Université de Caen, UER Sciences
Esplanade de la Paix
14032 CAEN CEDEX

(Texte reçu le 25 juin 1973)