Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Waldschmidt

Une méthode « élémentaire » dans la théorie des nombres transcendants, I

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1972-1973), exp. nº G1, p. G1-G5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° G1, 5 p.

16 octobre 1972

UNE MÉTHODE "ÉLÉMENTAIRE" DANS LA THÉORIE DES NOMBRES TRANSCENDANTS, I.

par Michel WALDSCHMIDT

De nombreuses méthodes classiques de transcendance de nombres complexes utilisent des outils de la théorie des fonctions holomorphes. Quand on se restreint à l'étude de nombres réels, on peut effectuer ces démonstrations en n'employant, dans la partie analytique, que le théorème de ROLLE. Ceci a déjà été fait par MENDÈS FRANCE dans [3], et par GEL'FOND et LINNICK dans [1] (Chapitre 12 : Transcendance de quelques classes de nombres, p. 221-228), pour la méthode de GEL'FOND dans la démonstration de la transcendance de a^b, et pour la transcendance de e^α.

Nous exposerons ici une telle démonstration "élémentaire" de la transcendance de a^b par la méthode de SCHNEIDER (c'est-à-dire essentiellement sans employer d'équation différentielle). Dans un exposé suivant (n° G5), nous démontrerons, dans le cas réel, un théorème de Baker sur l'indépendance linéaire de logarithmes de nombres algébriques.

1. Préliminaires.

Nous noterons $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers rationnels, $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, et $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques, c'est-à-dire la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Si a est un nombre algébrique, on note $d(a)$ le plus petit entier rationnel positif tel que $d(a).a$ soit entier algébrique (sur $\mathbb{Z}$), et on note $\|a\|$ le nombre

$$\|a\| = \max_{\{\sigma\}} |\sigma(a)| ,$$

où $\{\sigma\}$ décrit l'ensemble des plongements de $\mathbb{Q}(a)$ dans $\mathbb{C}$. Enfin, on définit la taille $t(a)$ de a par

$$t(a) = \max(\log d(a) , \log \|a\|) ,$$

pour $a \neq 0$, $a \in \overline{\mathbb{Q}}$.

La propriété fondamentale de la taille [2], [4] :

$$(0) \qquad - 2.[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}].t(a) \leqslant \log |a| ,$$

pour tout $a \in \overline{\mathbb{Q}}$, $a \neq 0$, est due au fait que la norme (de $\mathbb{Q}(a)$ sur $\mathbb{Q}$) du nombre $d(a).a$ est un entier rationnel non nul.

Le premier lemme que nous aurons à utiliser, dû à SIEGEL, est une application du "principe des tiroirs" de Dirichlet. Comme on en trouve des démonstrations un peu partout ([1], [2], [3], [4]), il semble inutile d'en écrire une de plus.

LEMME 1. - Soit K un corps de nombres. Il existe une constante C_K ayant la propriété suivante.

Soient n et r deux entiers rationnels, $n \geq 2.r > 1$, et soient $\alpha_{i,j}$ ($1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$) des éléments de K entiers sur $\mathbb{Z}$. Alors, il existe n éléments $x_1, \ldots, x_n$ de K, entiers sur $\mathbb{Z}$ et non tous nuls, tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\, x_j = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq r ,$$

et

$$\max_{1\leq j\leq n} t(x_j) \leq \max_{i,j} t(\alpha_{i,j}) + \log n + C_K .$$

Le deuxième lemme permet de majorer le nombre de zéros réels de polynômes exponentiels.

LEMME 2 [1]. - Soient $P_1, \ldots, P_q$ des polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$, de degré strictement inférieur à $p_1, \ldots, p_q$ respectivement. Soient $W_1, \ldots, W_q$ des nombres réels, deux-à-deux distincts. Alors la fonction

$$x \longmapsto f(x) = \sum_{k=1}^{q} P_k(x) \exp(W_k\, x)$$

n'est pas identiquement nulle, et le nombre de zéros de f dans $\mathbb{R}$ est inférieur à $p_1 + \ldots + p_q$.

La démonstration se fait par récurrence sur q. Le cas $q = 1$ est trivial. Si $q > 1$, il existe des polynômes $Q_1, \ldots, Q_{q-1}$ de $\mathbb{R}[X]$, tels que

$$\frac{d^{p_q}}{dx^{p_q}}[\exp(-W_q\, x).f(x)] = \sum_{j=1}^{q-1} Q_j(x) \exp(W_j - W_q)x ;$$

de plus, le degré de Q_j est égal au degré de P_j, $1 \leq j \leq q-1$, donc les polynômes $Q_1, \ldots, Q_{q-1}$ sont non nuls, de degré strictement inférieur à $p_1, \ldots, p_{q-1}$ respectivement.

On termine alors la démonstration en utilisant la conséquence suivante du théorème de Rolle : Si une fonction réelle m fois continûment dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ possède au moins m zéros (comptés, comme toujours, avec leur ordre de multiplicité) sur I, alors, pour tout entier h, $0 \leq h \leq m-1$, la fonction $(d^h/dx^h)f$ possède au moins $m-h$ zéros sur I.

Le lemme suivant permet de majorer une fonction réelle ayant de nombreux zéros.

LEMME 3 [1]. - Soit f une fonction réelle définie et q fois continûment dérivable sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que f a au moins q zéros sur $[a, b]$, q entier, $q \geq 1$. Soit ν un entier, $0 \leq \nu \leq q-1$. Alors on a

$$\max_{a\leq t\leq b} \left|\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(t)\right| \leq \frac{(b-a)^{q-\nu}}{(q-\nu)!} \max_{a\leq y\leq b} \left|\frac{d^q}{dx^q} f(y)\right| .$$

Pour démontrer ce résultat, on utilise de nouveau le théorème de Rolle : La fonction $(d^\nu/dx^\nu)f$ a au moins $q-\nu$ zéros dans $[a, b]$; soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme unitaire, de degré $q-\nu$, admettant pour racines ces $q-\nu$ zéros de f dans $[a, b]$. Soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $Q(x_0) \neq 0$. La fonction

$$F(x) = \frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x) - \frac{Q(x)}{Q(x_0)} \times \frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x_0)$$

a au moins $q-\nu+1$ zéros sur $[a, b]$. Le théorème de Rolle montre qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\frac{d^{q-\nu}}{dx^{q-\nu}} F(\xi) = 0 .$$

Or $(d^{q-\nu}/dx^{q-\nu})\, Q(x) = (q-\nu)!$, d'où

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x_0) = \frac{Q(x_0)}{(q-\nu)!} \frac{d^q}{dx^q} f(\xi) ;$$

ainsi, pour tout $x_0 \in [a, b]$ non racine de Q, on a

$$\left|\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x_0)\right| \leqslant \frac{(b-a)^{q-\nu}}{(q-\nu)!} \max_{a\leqslant\xi\leqslant b}\left|\frac{d^q}{dx^q} f(\xi)\right| .$$

D'où le lemme 3.

La notation log désignera toujours le logarithme népérien. Pour a et b réels, $a > 0$, on note

$$a^b = \exp(b \log a) .$$

2. Démonstration du théorème de Gel'fond-Schneider.

THÉORÈME. - *Soient a et b deux nombres réels algébriques, tels que $a > 0$, $a \neq 1$ et $b \notin \mathbb{Q}$. Alors le nombre a^b est transcendant.*

La démonstration se fait par l'absurde : Supposons que les trois nombres a, b et a^b soient algébriques ; soit Δ le plus petit commun multiple des trois nombres

$$d(a) , \quad d(b) , \quad d(a^b) .$$

Notons K le corps obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les trois nombres a, b et a^b. On peut évidemment supposer $b > 0$. On notera $c_1, \ldots, c_4$ des constantes ne dépendant que de a, b et a^b.

Soit N un entier suffisamment grand, c'est-à-dire vérifiant un nombre fini de minorations en fonction de $c_1, \ldots, c_4$.

Montrons d'abord qu'il existe des éléments

$$a_{i,j} \qquad (1 \leqslant i \leqslant 2N^3 , \quad 1 \leqslant j \leqslant N)$$

de K, entiers sur $\mathbb{Z}$ et non tous nuls, tels que la fonction

(1) $$F(x) = \sum_{i=1}^{2N^3} \sum_{j=1}^{N} a_{i,j}\, x^{i-1} a^{jx}$$

vérifie

(2) $$F(\lambda + \mu b) = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda = 1 , \ldots , N^2 \quad \text{et} \quad \mu = 1 , \ldots , N^2 .$$

Considérons pour cela le système d'équations

$$\Delta^{4N^3}.F(\lambda + \mu b) = 0 \ , \quad \lambda \ , \mu = 1 \ , \ldots , N^2 \ ,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{2N^3} \sum_{j=1}^{N} a_{i,j}(\Delta\lambda + \Delta\mu b)^{i-1}.(\Delta a)^{\lambda j}.(\Delta a^b)^{\mu j}.\Delta^{4N^3-i-1-j\lambda-j\mu} = 0 \ .$$

Le nombre d'inconnues $a_{i,j}$ est $2N^4$, et le nombre d'équations est N^4. De plus, on peut majorer la taille des coefficients par $c_1.N^3.\log N$.

Le lemme 1 montre qu'il existe une solution non triviale $(a_{i,j})$, vérifiant de plus :

$$t(a_{i,j}) \leqslant c_2.N^3.\log N \leqslant N^4 \tag{3}$$

pour N suffisamment grand.

La fonction F, définie par (1), n'est pas identiquement nulle ; le lemme 2 montre même que le nombre de zéros de F dans $\underset{\sim}{R}$ est majoré par

$$\sum_{j=1}^{N}(2N^3 - 1) < 2N^4 \ ,$$

donc <u>il existe deux entiers</u> λ_0, μ_0 <u>tels que</u>

$$1 \leqslant \lambda_0 \leqslant 2N^2 \ , \quad 1 \leqslant \mu_0 \leqslant N^2 \ , \ \underline{\text{et}} \quad F(\lambda_0 + \mu_0 b) \neq 0 \ .$$

Or la fonction F possède au moins N^4 zéros dans l'intervalle

$$[0 \ , (2 + |b|)N^2] \ ,$$

grâce à (2). D'autre part, pour $0 \leqslant y \leqslant (2 + |b|)N^2$, on a

$$\left|\frac{d^{N^4}}{dx^{N^4}} F(y)\right| = \left|\sum_{i=1}^{2N^3} \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \sum_{\mu=0}^{N^4} \frac{N^4}{\mu!(N^4-\mu)!} \frac{(i-1)!}{(i-\mu-1)!} y^{i-\mu-1} (j \log a)^{N^4-\mu} a^{jy}\right|$$

$$\leqslant 2N^4 \max_{i,j}|a_{i,j}|(N^4+1) \ 2^{N^4} (2N^3)^{N^3} [(2+|b|)N^2]^{2N^3} \times (N \log a)^{N^4} (a+1)^{N^4(2+|b|)} \ ,$$

ce qui, pour N assez grand, est inférieur à

$$N^{N^4} \times c_3^{N^4} < N^{(3/2)N^4} \ .$$

Le lemme 3 permet alors de <u>majorer</u> $F(\lambda_0 + \mu_0 b)$:

$$|F(\lambda_0 + \mu_0 b)| \leqslant \frac{[(2 + |b|)N^2]^{N^4}}{(N^4)!} N^{(3/2)N^4} \leqslant N^{-(1/4)N^4} \ .$$

Le <u>calcul de la taille de</u> $F(\lambda_0 + \mu_0 b)$ est facile ; il donne

$$t(F(\lambda_0 + \mu_0 b)) \leqslant c_4.N^4 \ .$$

L'inégalité (0) n'étant pas vérifiée pour $\alpha = F(\lambda_0 + \mu_0 b)$, on en déduit $\alpha = 0$, ce qui apporte la contradiction attendue et termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GEL'FOND (A. O.) et LINNIK (Ju. V.). - Méthodes élémentaires dans la théorie analytique des nombres ; Traduction faite d'après l'édition originale russe (Moskva, 1962) par M. et J. - L. Verley. - Paris, Gauthier-Villars, 1965 (Monographies internationale de Mathématiques modernes, 6).

[2] LANG (Serge). - Introduction to transcendental numbers. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1966 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[3] MENDES FRANCE (Michel). - Transcendance de a^b , Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 3e année, 1961/62, n° 14, 11 p.

[4] WALDSCHMIDT (Michel). - Initiation aux nombres transcendants, Publications mathématiques de l'Université de Bordeaux, Année I, 1973, p. 1-39, et l'Enseignement mathématique (à paraître en 1974).

(Texte reçu le 27 juin 1973)

Michel WALDSCHMIDT
Mathématiques, Bât. 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY