Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

DIDIER NORDON

Zéros communs à deux formes quadratiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1972-1973), exp. nº 16, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_1_A14_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° 16, 4 p.

5 mars 1973

ZÉROS COMMUNS À DEUX FORMES QUADRATIQUES

par Didier NORDON (1)

Nous résumons une démonstration du théorème de DEM'JANOV sur les zéros communs à deux formes quadratiques sur un corps p-adique, puis apportons des compléments à ce résultat, grâce à un théorème sur les zéros communs à deux formes quadratiques sur un corps fini.

1. Notations.

Nous désignerons toujours par F et G deux formes quadratiques sur un corps k (i. e. à coefficients dans k) ; quand la caractéristique de k est différente de 2, F et G désigneront également les matrices symétriques correspondantes ; n sera le nombre d'indéterminées intervenant dans F et G. Si T est une transformation linéaire portant sur les coordonnées, nous poserons $F_T(X) = F(TX)$, où X est un vecteur de k^n. Soit $\gamma(F)$ le nombre de variables apparaissant explicitement dans F ; l'ordre $O(F)$ est défini par

$$O(F) = \min_T \gamma(F_T) ,$$

où T parcourt toutes les transformations linéaires non singulières définies sur k.

Une forme est dite dégénérée si $O(F) < n$. On a des définitions analogues pour un couple de formes.

Si la caractéristique de k est différente de 2, nous écrirons

$$\Phi(u , v) = \text{dét}(uF + vG) \quad \text{pour } u \text{ et } v \in k$$

et

$$\Theta(F , G) = \text{discriminant de } \Phi(u , v) .$$

On dit qu'un zéro d'une forme, ou d'un couple de formes, est non singulier si le point correspondant est non singulier sur la variété algébrique correspondante. Donc X est un zéro non singulier de F si le vecteur FX est non nul, et c'est un zéro non singulier commun à F et G si les vecteurs FX et GX sont non colinéaires.

2. Le théorème de Dem'janov.

Le résultat suivant prouve un cas particulier de la conjecture d'Artin.

---

(1) Membre de l'ERA-CNRS n° 362.

THÉORÈME DE DEM'JANOV. - Deux formes quadratiques sur un corps p-adique en au moins 9 indéterminées ont un zéro commun sur ce corps. (Nous excluons bien entendu le zéro trivial).

La démonstration qu'en ont donnée BIRCH, LEWIS, MURPHY [1] repose essentiellement sur les résultats suivants.

LEMME DE HENSEL. - Soient F et G deux formes quadratiques sur $\underset{\sim}{Z}_p$, et $\overline{F}$ et $\overline{G}$ leur réduction modulo p ; supposons que $\overline{F}$ et $\overline{G}$ ont un zéro commun non singulier sur $\underset{\sim}{F}_p$. Alors F et G ont un zéro commun.

THÉORÈME DE CHEVALLEY (cas particulier). - Supposons le corps k fini. Une forme quadratique en au moins 3 indéterminées sur k a un zéro dans k. Si $O(F) \geqslant 3$, F a un zéro non singulier dans k. Deux formes quadratiques en au moins 5 indéterminées sur k ont un zéro commun dans k.

LEMME 1 (k à nouveau quelconque). - Supposons le couple (F , G) non dégénéré ; supposons que F et G ont un zéro commun mais pas de zéro commun non singulier. Alors, il existe une forme dans le faisceau $uF + vG$ $(u , v \in k)$ qui n'a que des zéros singuliers.

Enfin, on utilise le lemme technique suivant.

LEMME 2. - Soient a , b , c , d, dans k de caractéristique différente de 2, et T une transformation linéaire. Alors

$$\theta(aF_T + bG_T , cF_T + dG_T) = (ad - bc)^{n(n-1)} (\text{dét } T)^{4(n-1)} \theta(F , G) .$$

(Si $ad - bc \neq 0$, le couple $(aF_T + bG_T , cF_T + dG_T)$ est dit équivalent au couple (F , G)).

Voici l'idée générale de la démonstration. On suppose d'abord $\theta(F , G)$ non nul. On se ramène alors au cas où la valuation p-adique de $\theta(F , G)$ est minimale dans l'ensemble des couples équivalents à (F , G). Le lemme 2 permet alors de montrer que, si $n \geqslant 9$, les hypothèses du lemme 1 et celles du théorème de Chevalley sont vérifiées par $\overline{F}$ et $\overline{G}$. On en déduit que $\overline{F}$ et $\overline{G}$ ont un zéro commun non singulier, d'où le résultat grâce au lemme de Hensel. Si $\theta(F , G) = 0$, on approche p-adiquement F et G par une suite F_i, G_i avec $\theta(F_i , G_i) \neq 0$: chacun des couples F_i, G_i a un zéro commun, donc aussi F et G d'après le caractère complet de $\underset{\sim}{Q}_p$.

Le caractère nul ou non de $\theta(F , G)$ a un sens géométrique :

LEMME (WEIL). - La variété $F = G = 0$ est singulière si, et seulement si,

$$\theta(F , G) = 0 .$$

Ce lemme est énoncé par WEIL [4]. Rappelons que θ est nul si et seulement s'il existe une extension de k dans laquelle $\Phi(u , v)$ a un facteur linéaire multiple.

Rappelons aussi que si F et G sont définies sur k, la variété $F = G = 0$ est dite singulière s'il existe une extension de k dans laquelle F et G ont un zéro commun singulier.

3. Compléments au théorème de Dem'janov.

Le théorème de Dem'janov est le meilleur possible, en ce sens qu'on peut trouver des formes en huit indéterminées sans zéro commun. Si $\overline{\alpha}$ est un non-résidu de $\mathbb{F}_p$, les formes

$$F(x_1, \dots, x_8) = x_1^2 - \alpha x_2^2 + p(x_3^2 - \alpha x_4^2)$$

$$G(x_1, \dots, x_8) = x_5^2 - \alpha x_6^2 + p(x_7^2 - \alpha x_8^2)$$

en sont un exemple. Le théorème suivant permet cependant de compléter le théorème de Dem'janov.

THÉORÈME. - *Soit k un corps fini de caractéristique différente de 2. Soient F et G deux formes quadratiques sur k en n indéterminées, et supposons le couple (F, G) non dégénéré. Supposons que toute forme $uF + vG$ $((u, v) \neq (0, 0))$ du faisceau engendré par F et G a un zéro non singulier. Alors, F et G ont un zéro commun non singulier, sauf si les conditions suivantes sont simultanément remplies : $n = 4$, la variété $F = G = 0$ est singulière, $\Phi(u, v)$ n'a pas de facteur linéaire multiple dans k, et le déterminant de F est un non-résidu de k ; dans ce cas exceptionnel, F et G n'ont pas de zéro commun.*

Démonstration. - Pour $n \geqslant 5$, ce théorème est une conséquence immédiate du théorème de Chevalley et du lemme 1. Les cas $n = 4$, 3 ou 2 s'examinent en cherchant des formes réduites pour F et G, et en utilisant la formule de WEIL [4] qui donne le nombre de zéros communs à deux formes quadratiques sur un corps fini.

Les formes suivantes, considérées sur le corps $\mathbb{F}_5$, donnent un exemple du cas exceptionnel :

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2$$

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = - x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_3 x_4 ;$$

alors $\Phi(u, v) = 2(u^2 - 2v^2)^2$.

PROPOSITION. - *Supposons p différent de 2. Si $4 \leqslant n \leqslant 8$ et s'il existe un couple (F_1, G_1) équivalent au couple (F, G) tel que p ne divise pas $\theta(F_1, G_1)$, F et G ont un zéro commun.*

Démonstration. - Il revient au même de montrer que F_1 et G_1 ont un zéro commun. L'hypothèse $p \nmid \theta(F_1, G_1)$ entraîne que toute forme du faisceau $\overline{F}_1$, $\overline{G}_1$ a un zéro non singulier, et que le cas exceptionnel du théorème ne peut pas se produire. D'où la proposition par le lemme de Hensel.

De ce qui précède, on déduit qu'étant données deux formes quadratiques à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$

- si $n \geqslant 9$, elles ont un zéro p-adique commun pour tout p ,

- si $4 \leqslant n \leqslant 8$ et $\theta(F , G) \neq 0$, elles ont un zéro p-adique commun pour presque tout p .

Rappelons que le principe de Hasse est faux pour un couple de formes quadratiques ; voir par exemple [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRCH (B. J.), LEWIS (D. J.) and MURPHY (T. G.). - Simultaneous quadratic forms, Amer. J. Math., t. 84, 1962, p. 110-115.

[2] DEM'JANOV (V. B.). - Pairs of quadratic forms over a complete field with discrete norm with a finite residue class field [en Russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, t. 20, 1956, p. 307-324.

[3] ISKOVSKIKH (V. A.). - A counterexample to the Hasse principle for a system of two quadratic forms in five variables [en Russe], Mat. Zametki, Math. Notes, t. 10, 1971, p. 253-257 ; [en Anglais] Math. Notes Acad. Sc. URSS, mai 1972.

[4] WEIL (A.). - Footnote to a recent paper, Amer. J. Math., t. 76, 1954, p. 347-350.

(Texte reçu le 12 mars 1973)

Didier NORDON
Université de Bordeaux-I
U. E. R. de Mathématiques
351 cours de la Libération
33405 TALENCE