Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Martine Pathiaux

Sur les multiples de polynômes irréductibles associés à certains nombres algébriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1972-1973), exp. nº 13, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_1_A11_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° 13, 9 p.

22 janvier 1973

SUR LES MULTIPLES DE POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES ASSOCIÉS À CERTAINS NOMBRES ALGÉBRIQUES

par Martine PATHIAUX

Introduction.

Marthe GRANDET et Charles PISOT [3] ont démontré que tout nombre de Pisot Salem est racine d'un polynôme de $\underset{\sim}{Z}[x]$ dont les coefficients sont majorés par $|\theta|$. On peut penser que cette propriété s'étend au cas où le nombre n'est plus entier algébrique ; en particulier, si on examine les plus petits éléments de $S_q[1]$ qui sont zéros de $qz^3 + (q-1) z^2 - qz - q$, $qz^4 - z^3 - q$, $qz^5 - z^4 - qz^3 + qz^2 - q$,... on constate qu'ils sont racines d'un polynôme (et même irréductible) dont les coefficients sont majorés par $q|\theta|$. On se propose donc d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME. - <u>Soient</u> $\theta_1 , \ldots , \theta_s$ <u>les zéros d'un polynôme</u> $B(x) \in \underset{\sim}{Z}[x]$ <u>irréductible, primitif, dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à</u> q <u>et tels que</u> :

$$|\theta_1| \geqslant |\theta_2| \geqslant \ldots \geqslant |\theta_r| > 1 \geqslant |\theta_{r+1}| , \ldots , |\theta_s|$$

<u>alors</u>, $\theta_1 , \ldots , \theta_s$ <u>sont zéros d'un polynôme de</u> $\underset{\sim}{Z}[x]$ <u>dont les coefficients sont majorés par</u> $q \prod_{1\leqslant i\leqslant r} |\theta_i|$.

La démonstration de [3] utilise le principe des tiroirs, on pouvait donc penser que le lemme de Minkowski p-adique permettrait d'obtenir le résultat espéré (lemme obtenu par Françoise BERTRANDIAS [2] déduit de résultats de Elisabeth LUTZ).

LEMME de Minkowski p-adique. - <u>Soient</u> $n + 1$ <u>formes</u> $L_i^0(x)$ <u>linéaires en</u> $(x_0 , \ldots , x_n)$, <u>à coefficients complexes, de déterminant</u> $\Delta_0 \neq 0$ <u>et telles qu'avec chaque forme figure sa conjuguée</u> ; <u>soient</u> $n + 1$ <u>nombres</u> c_i <u>réels positifs tels que</u> $c_i = c_j$ <u>si</u> L_i^0 <u>et</u> L_j^0 <u>sont conjuguées</u>.

<u>Soient</u> J <u>une famille finie de nombres premiers</u> p <u>et pour</u> $\forall\, p \in J$, $n + 1$ <u>formes</u> $L_i^p(x)$, <u>linéaires en</u> $(x_0 , \ldots , x_n)$, <u>à coefficients dans</u> $\underset{\sim}{Q}_p$, <u>de déterminant</u> $\Delta_p \neq 0$.

<u>Soient</u> $\rho_{p,i} \in \underset{\sim}{Z}$ <u>tels que l'ensemble de</u> $\underset{\sim}{Q}_p^{n+1}$, <u>défini par les conditions</u>

$$|L_i^p(x)|_p \leqslant p^{-\rho_{p,i}}$$

<u>soit contenu dans</u> $\underset{\sim}{Z}_p^{n+1}$, <u>il existe alors</u> $(x_0 , \ldots x_n) \in \underset{\sim}{Z}^{n+1}$ <u>non nul tel que</u>

$$\begin{cases} |L_i^0(x)| < c_i & p \in J \\ |L_i^p(x)|_p \leqslant p^{-\rho_{p,i}} & 1 \leqslant i \leqslant n + 1 \end{cases}$$

dès que

$$\prod_{i=1,\dots,n+1} c_i \prod_{p\in J} \prod_{i=1,\dots,n+1} p^{-\rho_{p,i}} > |\Delta_0| \prod_{p\in J} |\Delta_p|_p \ .$$

Pour démontrer ce lemme, on utilise les deux propriétés suivantes :

1° L'ensemble de $\underset{\sim}{Z}^{n+1}$ vérifiant $|L_i^p(x)|_p \leqslant p^{-\rho_{p,i}}$ pour $i = 1 , \dots , n + 1$ est un sous-groupe G_p de $\underset{\sim}{Z}^{n+1}$ dont l'indice m_p dans $\underset{\sim}{Z}^{n+1}$ est égal à $\dfrac{1}{\text{mes } K_p}$ où

$$K_p = \{x \in \underset{\sim}{Z}_p^{n+1} \ |L_i^p(x)|_p \leqslant p^{-\rho_{p,i}}\} \quad \text{pour} \quad i = 1 , \dots , n$$

2° La mesure d'un ensemble $\mathcal{E}$ de $\underset{\sim}{Q}_p^{n+1}$ défini par

$$\mathcal{E} = \{ |\Delta_j(x)|_p \leqslant 1 \ , \quad x \in \underset{\sim}{Q}_p^{n+1}\}$$

où $\Delta_j(x)$ sont $n + 1$ formes linéaires en $(x_0 , \dots , x_n)$ à coefficients p-adiques de déterminant $\Delta \neq 0$ est égal à

$$\text{mes } \mathcal{E} = \frac{1}{|\Delta|_p^{-1}} \ .$$

Le principe de la démonstration consiste à trouver des entiers

$$(d_0 , \dots , d_n) \in \underset{\sim}{Z}^{n+1} ,$$

tels que le nombre rationnel $\prod_{i=1,\dots,s} d_n \theta_i^n + \dots + d_0$ soit petit, et tels que son dénominateur,,qui est un diviseur de q^{ns} , soit petit ; ce qui sera réalisé si $|\prod_{i=1,\dots,s} d_n \theta_i^n + \dots + d_0|_p$ est petit pour $\forall \ p|q$.

Soient $\theta_{1,p} , \theta_{2,p} , \dots , \theta_{s,p}$ les racines de $B(x)$ dans Ω_p . On a :

$$\prod_{i=1,\dots,s}(d_n \theta_i^n + \dots + d_0) = \prod_{i=1,\dots,s}(d_n \theta_{i,p}^n + \dots + d_0) \ , \quad \forall \ p \ .$$

En particulier, si $p|q$, et si on range les racines telles que

$$|\theta_{1,p}|_p \geqslant \dots \geqslant |\theta_{s_p,p}|_p > 1 \geqslant |\theta_{s_p+1,p}|_p > \dots > |\theta_{s,p}|_p \ ,$$

alors, $s_p \geqslant 1$; il suffit de déterminer $d_0 , \dots , d_n \in \underset{\sim}{Z}^{n+1}$ tels que

$$|d_n \theta_{i,p} + \dots + d_0|_p$$

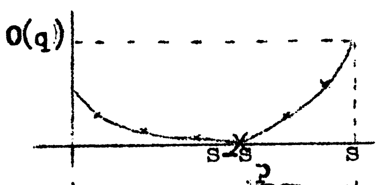
soit petit pour $p|q$, $1 \leqslant i \leqslant s_p$.

Mais le théorème de Minkowski n'est vrai que si les coefficients des formes linéaires appartiennent à $\underset{\sim}{Q}_p$ et en général, $\theta_{i,p} \in \Omega_p$. On introduit donc

$$\text{(1)} \qquad a_{n,p} = \theta_{1,p}^n + \theta_{2,p}^n + \dots + \theta_{s_p,p}^n \ .$$

LEMME 1. - $a_{n,p} \in \underset{\sim}{Q}_p$: <u>D'après les propriétés du polygone de Newton,</u> $B(x)$ <u>pour</u> $p|q$ <u>se décompose dans</u> $\underset{\sim}{Q}_p[x]$ <u>sous la forme</u> :

$$B(x) = B_1(x) \ B_2(x) \ ,$$



polygone de Newton de B_2 — polygone de Newton de B_1

où

$$(2)\qquad \begin{aligned} B_1(x) &= qx^{s_p} + \dots + q'_{0,p} \in \underset{\sim}{Q}_p[x] \\ B_2(x) &= x^{s-s_p} + \dots + q''_{0,p} \in \underset{\sim}{Q}_p[x] \end{aligned}$$

avec $|q'_{0,p}| = 1$ et où $\theta_{1,p}$, ... , $\theta_{s_p,p}$ sont les zéros de $B_1(x)$.

Donc $a_{n,p}$, qui est une fonction symétrique de $\theta_{1,p}$, ... , $\theta_{s_p,p}$, s'exprime en fonction des coefficients de $B_1(x)$, donc appartient à $\underset{\sim}{Q}_p$. De plus, $a_{n,p}$ vérifie

$$(3)\qquad q a_{n+s_p,p} + \dots + q'_{0,p}\, a_{n,p} = 0 \qquad \forall\, n \geqslant s_p .$$

LEMME 2. - Si d_0 , ... , $d_n \in \underset{\sim}{Q}$ vérifient

$$I_p \begin{cases} |d_n\, a_{n,p} + \dots + d_0|_p \leqslant p^{-\mu_p} \\ \vdots \\ |d_n\, a_{n+s_p-1,p} + \dots + d_0\, a_{s_p-1}|_p \leqslant p^{-\mu_p} \end{cases}$$

et si on pose

$$I_{p'} \begin{cases} |d_n\, \theta_{1,p}^n + \dots + d_0|_p \leqslant p^{-\lambda_p} \\ \vdots \\ |d_n\, \theta_{s_p,p}^n + \dots + d_0|_p \leqslant p^{-\lambda_p} \end{cases}$$

alors le système $I_{p'}$ est vérifié, où λ_p ne dépend que de μ_p et de $\theta_{1,p}$, ... , $\theta_{s_p,p}$.

Si on pose $u_i = d_n\, \theta_{i,p}^n + \dots + d_0 \quad 1 \leqslant i \leqslant s_p$, on voit que le système I_p s'écrit

$$I_p \begin{cases} |u_1 + \dots + u_{s_p}|_p \leqslant p^{-\mu_p} \\ |u_1\, \theta_1 + \dots + u_{s_p}\, \theta_{s_p}|_p \leqslant p^{-\mu_p} \\ \dots \\ |\theta_1^{s_p}\, u_1 + \dots + \theta_{s_p}^{s_p}\, u_{s_p}|_p \leqslant p^{-\mu_p} \end{cases}$$

En résolvant le système de Cramer en u_1 , ... , u_{s_p} dont le déterminant est $\prod_{i,j}(\theta_{i,p} - \theta_{j,p}) \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant s_p$, $1 \leqslant j \leqslant s_p$, $i \neq j$ puisque

$$\prod_{i,j}(\theta_i - \theta_j) = \prod_{i,j}(\theta_{i,p} - \theta_{j,p}) \neq 0 , \quad 1 \leqslant i \leqslant s , \quad 1 \leqslant j \leqslant s , \quad i \neq j ,$$

on obtient le résultat.

Dans l'application du lemme il y a une condition sur les constantes $\rho_{i,p}$, d'où le lemme suivant :

Notations. - On pose

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} a_{n,p} , & \dots , & a_{n-s_p+1,p} \\ a_{n+s_p-1,p} , & \dots , & a_{n,p} \end{vmatrix}$$

On a en particulier

$$\Delta_{s_p-1,p} = \prod_{i,j}(\theta_{i,p} - \theta_{j,p})^2 , \qquad 1 \leqslant i \leqslant s_p , \quad 1 \leqslant j \leqslant s_p , \quad i \neq j$$

et soit $\mu_p \in \underset{\sim}{Z}$ tel que

$$p^{\mu_p} = \sup_{\Delta^*} \frac{|\Delta^*_{s_p-1,p}|_p}{|\Delta_{s_p-1,p}|_p} , \tag{4}$$

où Δ^* parcourt les mineurs de rang s_p-1 de $\Delta_{s_p-1,p}$.

LEMME 3. - L'ensemble $(d_0 , \dots , d_n)$ de $\underset{\sim}{Q}_p^{n+1}$, défini par les inégalités

$$\begin{cases} |d_n \; a_{n,p} + \dots + d_0 \; a_{0,p}|_p \leqslant p^{-\mu_p} \\ \dots \\ \dots \\ |d_n \; a_{n+s_p-1,p} + \dots + d_0 \; a_{s_p-1,p}|_p \leqslant p^{-\mu_p} \\ |d_{n-s_p}|_p \leqslant 1 \\ \dots \\ |d_0|_p \leqslant 1 \end{cases}$$

où μ_p est définie par (4), est contenu dans $\underset{\sim}{Z}_p^{n+1}$.

Soient $(d_0 , \dots , d_n) \in \underset{\sim}{Z}_p^{n-s_p+1} \times \underset{\sim}{Q}_p^{s_p}$, solution du système et

$$(\alpha_0 , \dots , \alpha_{s_p-1}) \in \underset{\sim}{Q}_p^{s_p} ,$$

tels que $|\alpha_i| \leqslant p^{-\mu_p}$ et $d_n \; a_{n+k,p} + \dots + d_0 \; a_{k,p} = \alpha_k$.

En résolvant le système de Cramer en $d_n , d_{n-1} , \dots , d_{n-s_p+1}$, on obtient

$$d_{n-j} = \frac{1}{\Delta_{n,p}} \begin{vmatrix} a_{n,p} & \dots & a_{n-j+1,p} & \alpha_0 & a_{n-j-1,p} & \dots & a_{n-s_p+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+s_p-1} & & a_{n-j+s_p,p} & \alpha_{s_p-1} & a_{n-j+s_p-1,p} & & a_{n,p} \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{1}{\Delta_{n,p}} \sum_{i=0}^{n-s} d_i \begin{vmatrix} a_{n,p} & \dots & a_{n-j+1,p} & a_{i,p} & a_{n-j-1,p} & \dots & a_{n-s_p+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+k,p} & & \vdots & a_{i+k,p} & \vdots & & a_{n+k-s_p+1,p} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+s_p-1} & & a_{n-j+s_p,p} & a_{i+s_p-1,p} & a_{n-j+s_p-1,p} & & a_{n,p} \end{vmatrix}$$

En utilisant la formule de récurrence vérifiée par $a_{n,p}$ (3), on voit que

(5) $$\Delta_{n,p} = \left(\frac{q_{0,p}}{q}\right)^{n+1-s_p} \Delta_{s_p-1,p} \ .$$

D'autre part, soit $\Delta^*_{n,p}$ un mineur de rang $s_p - 1$ de $\Delta_{n,p}$

$$\Delta^*_{n,p} = \begin{vmatrix} a_{n,p} & \cdots & a_{n-j+1,p} & a_{n-j-1,p} & a_{n-s_p+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+\ell-1,p} & & \cdots & \cdots & a_{n+\ell-s_p,p} \\ a_{n+\ell+1,p} & & \cdots & \cdots & a_{n+\ell+2-s_p,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+s_p-1,p} & & a_{n-j+s_p,p} & a_{n-j+s_p-1,p} & a_{n,p} \end{vmatrix}$$

En remplaçant la première colonne, en utilisant la relation

$$a_{n+k} = - \sum_{r=1}^{s_p} \frac{q_{s_p-r,p}}{q} a_{n+k-r} \ ,$$

on obtient

$$\Delta^*_{n,p} = (-1)^j \frac{q_{s_p-j,p}}{q} \Delta^*_{n-1,p} - \frac{q_0}{q} \Delta'^*_{n-1,p} \ ,$$

où $\Delta^*_{n-1,p}$ et $\Delta'^*_{n-1,p}$ sont deux mineurs de rang $s_p - 1$ de $\Delta_{n-1,p}$. D'où

$$|\Delta^*_{n,p}|_p \leqslant |\tfrac{1}{q}|_p \sup_{\Delta^*} |\Delta^*_{n-1,p}|_p$$

et donc

(6) $$|\Delta^*_{n,p}|_p \leqslant |\tfrac{1}{q}|^{n+1-s_p} \sup_{\Delta^*} |\Delta^*_{s_p-1,p}|_p = |\tfrac{1}{q}|_p^{n+1-s_p} \ p^{\mu_p} |\Delta_{s_p-1,p}|_p \ .$$

Les relations (5) et (6) permettent donc de majorer la première partie de d_{n-j} .

Montrons, d'autre part, qu'il existe $\beta_0^{(n)}$, ... , $\beta_{s_p-1}^{(n)} \in \underset{\sim}{Z}_p$, tels que

(7) $$a_{i+k,p} = \beta_{s_p-1}^{(n)} a_{n+k-s_p+1,p} + \cdots + \beta_0^{(n)} a_{n+k,p} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant s_p - 1 \ .$$

La propriété est vraie pour $n = s_p$, d'après la relation de récurrence vérifiée par $a_{i,p}$, et $|q_{0,p}|_p = 1$.

Supposons donc la propriété vraie pour le rang $(n - 1)$, c'est-à-dire

$$a_{i+k,p} = \beta_{s_p-1}^{(n-1)} a_{n+k-s_p,p} + \cdots + \beta_0^{(n-1)} a_{n+k-1,p}$$

avec $|\beta_i^{(n-1)}|_p \leqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant s_p - 1$.

En remplaçant $a_{n+k-s_p,p}$ dans cette relation par

$$a_{n+k-s_p,p} = -\left(\frac{q_{1,p}}{q_{0,p}} a_{n+k+1-s_p,p} + \cdots + \frac{q}{q_{0,p}} a_{n+k,p}\right)$$

on obtiendra

$$a_{i+k,p} = \beta^{(n)}_{s_p-1}\ a_{n+k+1-s_p,p} + \dots + \beta^{(n)}_{0}\ a_{n+k,p}\ ,$$

avec

$$\beta^{(n)}_{j} = \beta^{(n-1)}_{j-1} - \frac{q_{s_p-j}}{q_{0,p}}\ ,$$

et donc $|\beta^{(n)}_j|_p \leqslant 1$.

Des relations (5), (6) et (7) on en déduit

$$|d_{n-j}|_p \leqslant \max(\left|\frac{q}{q_{0,p}}\right|_p^{n+1-s_p} \left|\frac{1}{q}\right|_p^{n+1-s_p}\ ,\ 1) = 1\ ,$$

pour $j = 0\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ s_p - 1$, d'où le résultat.

Soient $D \neq 0$ le déterminant de Vandermonde, construit sur $(\theta_1\ ,\ \dots\ ,\ \theta_r)$ et D^* un majorant des mineurs de D de rang $r-1$ et $\delta = (rD^*)/D$.

LEMME 4. - <u>Si</u> $(d_0\ ,\ \dots\ ,\ d_r) \in \underset{\sim}{Z}^{n+1}$ <u>est solution du système</u>

$$\begin{cases} |d_n\ \theta_1^n + \dots + d_0| < A \\ |d_n\ \theta_2^n + \dots + d_0| < A \\ \dots \\ |d_n\ \theta_r^n + \dots + d_0| < A \\ \quad d_{n-r} = 0 \\ \quad \vdots \\ \quad d_{n-t} = 0 \quad \underline{\text{où}}\quad t \geqslant r \\ |d_{n-t-1}| < B \\ \dots \\ \quad |d_0| < B \end{cases}$$

<u>où</u> A <u>et</u> B <u>vérifient</u>

(8) $$\delta\left(\frac{A}{|\theta_r|^{n-r+1}} + \frac{B}{|\theta_r|^{t-r+1}\ (|\theta_r| - 1)}\right) < 1\ ,$$

<u>alors</u> $|d_i| < B$ <u>pour</u> $i = 0\ ,\ \dots\ ,\ n$.

<u>Preuve</u>. - Soit $(d_0\ ,\ \dots\ ,\ d_n) \in \underset{\sim}{Z}^{n+1}$ une solution du système, on obtient alors

$$|d_n\ \theta_1^{r-1} + \dots + d_{n-r+1}| < \frac{A}{|\theta_r|^{n-r+1}} + \frac{B}{|\theta_r|^{t-r+1}\ (|\theta_r| - 1)}$$

$$\dots$$

$$|d_n\ \theta_r^{r-1} + \dots + d_{n-r+1}| < \frac{A}{|\theta_r|^{n-r+1}} + \frac{B}{|\theta_r|^{t-r+1}\ (|\theta_r| - 1)}$$

et en résolvant le système de Cramer en $d_n\ ,\ \dots\ ,\ d_{n-r+1}$ on obtient

$$|d_k| < \delta\left(\frac{A}{|\theta_r|^{n-r+1}} + \frac{B}{|\theta_r|^{t-r+1}\ (|\theta_r| - 1)}\right) < 1$$

soit $d_k = 0$ pour $k = n , n-1 , \dots , n-r+1$.

Démonstration du théorème. - Soient $\mu_p \in \underset{\sim}{Z}$ définies par (4) pour $p|q$. On cherche à résoudre dans $\underset{\sim}{Z}^{n+1}$ le système

$$
\mathrm{I}\left\{
\begin{array}{l}
|d_n\, \theta_1^n + \dots + d_0| < A \\
\dots \\
|d_n\, \theta_r^n + \dots + d_0| < A \\
\quad |d_{n-r}| < 1 \\
\quad \dots \\
\quad |d_{n-t}| < 1 \\
\quad |d_{n-t-1}| < B \\
\quad \dots \\
\quad |d_0| < B \\
|d_n\, a_{n,p} + \dots + d_0|_p \leqslant p^{-\mu_p} \\
\dots \\
|d_n\, a_{n+s_p-1,p} + \dots + d_0\, a_{s_p-1,p}|_p \leqslant p^{-\mu_p} \qquad \forall\ p|q \\
\quad |d_{n-s_p}|_p \leqslant 1 \\
\quad |d_0|_p \leqslant 1
\end{array}
\right.
$$

D'après le lemme de Minkowski et le lemme 3, ce système admet une solution dans $\underset{\sim}{Z}^{n+1}$ dès que

$$A^r\, B^{n-t} \prod_{p|q} p^{-\mu_p . s_p} \geqslant |D| . |\theta_1 \times \dots \times \theta_r|^{n-r+1} \prod_{p|q} |\Delta_{n,p}|_p ,$$

mais d'après (5)

$$|\Delta_{n,p}|_p = \left|\frac{1}{q}\right|_p^{n+1-s_p} |\Delta_{s_p-1,p}|_p .$$

Il existe donc une constante γ , ne dépendant que de $\theta_1 , \dots , \theta_s$, telle que, si

$$A^r\, B^{n-t} \geqslant \gamma \prod_{p|q} \frac{1}{|q|_p^n} \times |\theta_1 \times \dots \times \theta_r|^n ,$$

alors le système I admet une solution dans $\underset{\sim}{Z}^{n+1}$ non nulle, ou encore

(9) $$A^r\, B^{n-t} \geqslant \gamma\, q^r\, |\theta_1 \times \dots \times \theta_r|^n .$$

Supposons donc que, A , B , n , t , vérifient (9) et que $d_0 , \dots , d_r \in \underset{\sim}{Z}^{n+1}$ soit solution de I , en appliquant le lemme 2, on obtient

$$\prod_{p|q} \prod_{i=1,\dots,s} |d_n\, \theta_{i,p}^n + \dots + d_0|_p \leqslant \prod_{p|q} p^{-\lambda_p s_p} \leqslant \alpha ,$$

où α ne dépend que de $\theta_1 , \dots , \theta_s$.

Soit

$$\prod_{p|q} \left|\prod_{i=1,\dots,s} (d_n\, \theta_i^n + \dots + d_0)\right|_p \leqslant \alpha ,$$

et si $\prod_{i=1,\dots,s} d_n\,\theta_i^n + \dots + d_0$ est différent de 0 , on obtient

$$|\prod_{i=1,\dots,s} d_n\,\theta_i^n + \dots + d_0| \geqslant \frac{1}{\alpha} ,$$

puisque

$$\prod_{p|q} |\prod_{i=1,\dots,s} d_n\,\theta_i^n + \dots + d_0|_p \times |\prod_{i=1,\dots,s} d_n\,\theta_i^n + \dots + d_0| \geqslant 1 ,$$

Mais, d'autre part, d'après le lemme 4, et si A , B , n , t vérifient (8) et (9), on a alors

$$|\prod d_n\,\theta_i^r + \dots + d_0| < A^r (B.n + 1)^{s-r} .$$

Il suffit donc de déterminer des constantes n , A , B , t telles que

$$(10)\qquad \begin{cases} A^r.(B.n+1)^{s-r} < 1/\alpha \\ \delta\left(\dfrac{A}{|\theta_r|^{n-r+1}} + \dfrac{B}{|\theta_r|^{t-r+1}\,(|\theta_r| - 1)}\right) < 1 \\ A^r\, B^{n-t} \geqslant \gamma\, q^n |\theta_1 \times \dots \times \theta_r|^n \end{cases}$$

et si ceci est réalisé, il existera $d_0 , \dots , d_r \in \underset{\sim}{Z}^{n+1}$ vérifiant

$$|d_i| < B \quad \text{pour} \quad i = 0 , \dots , r \quad \text{et} \quad d_n\,\theta_i^r + \dots + d_0 = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1 , \dots , s .$$

Il suffit de choisir $B = [q|\theta_1 , \dots , \theta_r|] + 1$, t assez grand, tel que

$$\frac{\delta([q|\theta_1 \times \dots \times \theta_r|] + 1)}{|\theta_r|^{t-r+1}\,(|\theta_r| - 1)} < \frac{1}{2} ,$$

n assez grand, tel que

$$\frac{1}{2\alpha.(n+1)^{s-r}}([q|\theta_1 \times \dots \times \theta_r|] + 1)^{n-s+r-t} > \gamma\, |\theta_1 \times \dots \times \theta_r|^n\, q^n$$

et tel que $\dfrac{\delta}{(2\alpha)^{1/r}}\,\dfrac{1}{|\theta_r|^{n-r+1}} < \dfrac{1}{2}$. Et

$$A = \frac{1}{(2\alpha)^{1/r}} \left(\frac{1}{([q|\theta_1 \times \dots \times \theta_r|] + 1)(n+1)}\right)^{\frac{s}{r}-1}$$

Remarque. - Le théorème est encore vrai si le polynôme n'est pas irréductible ; il suffit de rajouter des inégalités dans le système.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMARA (M.). - Ensembles fermés de nombres algébriques (Thèse Sc. math., Paris, 1967).

[2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math., France, Mémoire 4, 1965, 104 p. (Thèse Sc. math., Paris, 1965).

[3] HUGOT (Marthe GRANDET-) et PISOT (Charles). - Sur certains entiers algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 2831-2833.

[4] LUTZ (Elisabeth). - Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1224 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 12).

(Texte reçu le 9 avril 1973)

Martine PATHIAUX
Avenue de Paris
78470 SAINT RÉMY LES CHEVREUSES