SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU.
THÉORIE DES NOMBRES

ALAIN ESCASSUT

Les algèbres de Krasner-Tate

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1971-1972), exp. n° 17, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° 17, 5 p.

13 mars 1972

LES ALGÈBRES DE KRASNER-TATE

par Alain ESCASSUT

Le but de cette étude est de préciser le rapport existant entre la théorie des algèbres de TATE [10] et la théorie des algèbres de KRASNER [8]. En considérant un corps K valué non archimédien, complet, algébriquement clos, nous montrerons que tout isomorphisme algébrique entre une algèbre de Krasner $H(D)$ et une algèbre topologiquement de type fini A sur K est bicontinu. Nous verrons, par exemple, que si A est isomorphe à $H(D)$, alors A est de la forme $K\{t\}[x]$, où x est entier sur $K\{t\}$, et que D est égal à une réunion finie d'infraconnexes fermés bornés disjoints dont les trous sont en nombre fini.

Nous caractériserons ensuite les algèbres de Krasner-Tate sous forme de quotient d'une extension topologiquement pure de degré 2 [10]. Par exemple, si D est ouvert, $H(D)$ est isomorphe à une algèbre de la forme $K\{T , X\}/(P(X) - TQ(X))$, où P et $Q \in K[X]$.

Nous caractériserons enfin les algèbres de Krasner-Tate parmi les K-algèbres de Banach en fonction de leurs propriétés algébriques et topologiques.

I. Rappels et résultats élémentaires.

1. Rappels sur la théorie de TATE [10].

Soit un corps K valué non archimédien complet. Soit $A = K\{X_1 , \dots , X_n\}/I$ une algèbre topologiquement de type fini, où $K\{X_1 , \dots , X_n\}$ est une extension topologiquement pure de K , et I un idéal de $K\{X_1 , \dots , X_n\}$. Nous savons, grâce à la proposition (4.4) de [10], qu'une algèbre de Banach A est topologiquement de type fini sur K si, et seulement si, c'est une extension entière finie d'une extension topologiquement pure de K . D'autre part, nous savons, grâce à la proposition (4.5) de [10], que A est noethérienne et que tout idéal maximal est de codimension finie. On peut à ce sujet établir un théorème des zéros de Hilbert pour une extension topologiquement pure, dont on déduit que, si K est algébriquement clos, le spectre maximal de A est en bijection de façon naturelle avec une partie de U^n , U étant l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x| \leqslant 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

2. Rappels sur la théorie de Krasner.

On se donne maintenant un corps valué non archimédien, complet, algébriquement clos et une partie D de K . On sait que l'ensemble $H(D)$ des éléments analytiques sur D [8] est une algèbre de Banach si, et seulement si, D est fermé borné (proposition I-1 de [4]). De plus, $H(D)$ est noethérienne si, et seulement si, les composantes infraconnexes de D sont en nombre fini, chacune d'elle étant ouverte et sans T-filtre ou réduite à un point (théorème 3 de [3]). (Rappelons que les notions d'infraconnexes, de composantes infraconnexes, de T-filtre sont définies dans [3], [4], [5].) De plus, si ces conditions sont réalisées, D n'admet pas de T-famille et, d'après le théorème 5 de [5], tout idéal maximal de $H(D)$ est de codimension 1 et de la forme $I(a)$, où a est un point de D , et où $I(a)$ est l'ensemble des éléments nuls en a . Enfin, d'après les théorèmes 1 et 2 de [3], si $H(D)$ est noethérienne, alors $H(D)$ est intègre si, et seulement si, D est infraconnexe.

3. Isomorphisme entre algèbres de Krasner et algèbres de Tate.

Le paragraphe 2, utilisant un corps à la fois valué non archimédien complet et algèbriquement clos, nous considérerons un tel corps K , et nous étudierons les isomorphismes entre une algèbre de Krasner $H(D)$ et une algèbre topologiquement de type fini sur K . Du fait que la norme d'une algèbre de Banach $H(D)$ est sa norme spectrale, on a, grâce au théorème de Banach [2], la proposition suivante :

PROPOSITION. - *Soit D un fermé borné, et soit A une K-algèbre de Banach. Tout isomorphisme algébrique entre A et $H(D)$ est bicontinu.*

II. Caractérisation des algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres de Krasner.

DÉFINITION 1. - Nous dirons qu'une algèbre de Banach A est une *algèbre de Krasner-Tate* si elle est isomorphe à la fois à une algèbre topologiquement de type fini sur K et à une algèbre $H(D)$ telle que D soit un fermé borné infini de K.

Nous noterons $|K|$ l'ensemble des $|\xi|$, $\xi \in K$.

DÉFINITION 2. - Nous dirons qu'un infraconnexe fermé borné est *calibré* si son diamètre appartient à $|K|$ et si le diamètre de chacun de ses trous appartient à $|K|$. Nous dirons plus généralement qu'un fermé borné est *calibré* si c'est une réunion finie d'infraconnexes calibrés.

DÉFINITION 3. - Nous dirons qu'une partie infinie D de K est *ultracirconférenciée* si c'est une réunion finie de fermés bornés calibrés disjoints dont les trous sont en nombre fini.

On peut maintenant conclure.

THÉORÈME 1. - *Soit D un fermé borné. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) *D est ultracirconférencié ;*

(b) *il existe une fraction $t = (P/Q) \in K(X)$ sans pôle dans D , telle que $\deg(P) > \deg(Q)$, $t(D) = U$, et telle que l'algèbre $K\{t\}$ des séries formelles* restreintes en t, munie de la norme $\| \|_D$ de $H(D)$, soit isométriquement isomorphe à une extension topologiquement pure de degré 1, et satisfasse

$$H(D) = K\{t\}[x] ,$$

où x est l'application identique de D ;

(c) $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate.

De plus, dans le cas où $H(D)$ est non dégradée, $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement s'il existe une fraction t satisfaisant l'assertion (b) et vérifiant également $D = t^{-1}(U)$ ($t^{-1}(U)$ étant l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|t(\xi)| \leqslant 1$).

THÉORÈME 2. - Soit D un ouvert ultracirconférencié inclus dans U, et soit t une fraction possédant les propriétés énoncées dans l'assertion (b) du théorème 1. Alors le spectre de $H(D)$, considéré comme algèbre topologiquement de type fini sur K, est l'ensemble des couples $(t(\mu), \mu)$, $\mu \in D$.

III. Caractérisation des algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres topologiquement de type fini.

Nous utiliserons fréquemmment les définitions suivantes :

DÉFINITION 4. - Soit A un anneau, et soient $a, b \in A$. On dit que a et b sont fortement étrangers dans A, si $aA + bA = A$.

DÉFINITION 5. - Soient D et D' deux fermés bornés de K tels que $H(D)$ et $H(D')$ soient deux algèbres de Banach isomorphes. Nous dirons que D et D' sont isomorphes.

THÉOREME 3. - Soit $H(D)$ une algèbre de Krasner-Tate non dégradée, et soit D' isomorphe à D tel que $D' \subset U$. Soient P et Q deux polynômes fortement étrangers de $K[X]$ satisfaisant

(a) P est unitaire ;
(b) $\deg(P) > \deg(Q)$;
(c) $1 = \|P\| \geqslant \|Q\|$ pour la norme canonique de $K\{X\}$;
(d) La fraction $t = (P/Q) \in K(D')$ satisfait $t(D') = U$, $D' = t^{-1}(U)$.

Alors $H(D)$ est isomorphe à l'algèbre topologiquement de type fini

$$K\{T , X\}/(P(X) - TQ(X))K\{T , X\},$$

où $K\{T , X\}$ est une extension topologiquement pure de degré 2.

Réciproquement, soient P et Q deux polynômes fortement étrangers de $K[X]$ satisfaisant (a), (b), (c). Soit $t = (P/Q) \in K(X)$, et soit $D = t^{-1}(U)$. Alors l'algèbre topologiquement de type fini $K\{T , X\}/(P(X) - TQ(X)) K\{T , X\}$ est isomorphe à $H(D)$.

THÉORÈME 4. - Soit $H(D)$ une algèbre de Krasner-Tate. Soit D' isomorphe à D tel que $D' \subset U$, soient $D_1, \ldots, D_n$ les composantes infraconnexes de D' qui ne sont pas réduites à un point, et soient $a_1, \ldots, a_n$ les points isolés de D'. Pour toute famille de couples (P_i, Q_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de polynômes fortement étrangers de $K[X]$, on notera (a), (b), (c), (d), (e), (f), les propriétés suivantes :

(a) La fraction $t_i = P_i/Q_i$ satisfait $t_i(D_i) = U$, $D_i = t_i^{-1}(U)$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$;

(b) P_i est unitaire $(1 \leqslant i \leqslant n)$;

(c) $\deg(P_i) > \deg(Q_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$;

(d) $1 = \|P_i\| \geqslant \|Q_i\|$ pour la norme canonique de $K\{X\}$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$;

(e) $P_i - TQ_i$ est irréductible dans $K\{T, X\}$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$;

(f) $P_i - TQ_i$ et $P_j - TQ_j$ sont fortement étrangers dans $K\{T, X\}$, quels que soient $i \neq j$.

Soit une famille de couples de polynômes fortement étrangers de $K[X]$, (P_i, Q_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ satisfaisant (a), (b), (c). Soient $b_1, \ldots, b_m \in U$. Alors la famille (P_i, Q_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ satisfait (d), (e), (f) ; $H(D_i)$ est isomorphe à $K\{T, X\}/((P_i(X) - TQ_i(X))\,K\{T, X\})$; $H(D)$ est isomorphe à

$$K\{T, X\}/\left(\prod_{j=1}^{m} [(X - a_j)K\{T, X\} + (T - b_j)K\{T, X\}] \prod_{i=1}^{n} (P_i(X) - TQ_i(X))K\{T, X\}\right).$$

Réciproquement, soit A une algèbre topologiquement de type fini de la forme ci-dessus, où $(a_j, b_j) \in U \times U$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, et où (P_i, Q_i) est un couple de polynômes fortement étrangers de $K[X]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ satisfaisant (b), (c), (d), (e), (f). Soit $t_i = P_i/Q_i \in K(X)$; soit $D_i = t_i^{-1}(U)$; soit $D = \{a_1, \ldots, a_m\} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} D_i)$. Alors A est isomorphe à $H(D)$.

IV. Caractérisation des algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres de Banach

THÉORÈME 5. - Soit A une K-algèbre de Banach dont la norme est notée $\|\cdot\|$ et dont la semi-norme spectrale est notée $\|\cdot\|_{sp}$. Alors A est une algèbre de Krasner-Tate si, et seulement si, A possède les propriétés suivantes :

(a) A est noethérienne ;

(b) A est réduite (i. e. 0 est le seul nilpotent de A) ;

(c) $\|f\|_{sp} \in |K|$ quel que soit $f \in A$;

(d) pour tout élément $f \in A$ tel que $\|f\|_{sp} \leqslant 1$, la suite $\|f^n\|$ est bornée ;

(e) A contient une sous-K-algèbre B dense dans A, principale, algébriquement de type fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Fonctions ultramétriques. Frontières analytiques dans certains quasi-connexes fermés d'un corps valué non archimédien complet et algébriquement clos, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, Série A, p. 1251-1253.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. I. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[3] ESCASSUT (Alain). - Algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 758-761.

[4] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner, Thèse 3e cycle, Bordeaux 1972.

[5] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Krasner, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 598-601.

[6] GRAUERT (Hans) und REMMERT (Reinhold). - Über die Methode der diskret bewerten Ringe in den nicht-archimedischen Analysis, Invent. Math., Berlin, t. 2, 1966, p. 87-133.

[7] GRUSSON (Laurent). - Algèbres de Banach ultramétriques, Journées Poitou-Aquitaine [1967, Poitiers].

[8] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du C. N. R. S. : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143.1964. Clermont-Ferrand] ; p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.

[9] SALMON (Pietro). - Serie convergenti su un corpo non archimedeo con applicazione ai fasci analitici, Annali di Mat. pura ed app., Serie 4, t. 65, 1964, p. 113-125.

[10] TATE (John). - Rigid analytic spaces, Invent. Math., Berlin, t. 12, 1971, p. 257-289.

(Texte reçu le 13 mars 1972)

Alain ESCASSUT
Université de Bordeaux-I
Mathématiques
351 cours de la Libération
33405 TALENCE