Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Khyra Lamèche-Gérardin

Séries rationnelles à plusieurs variables non commutatives, Hadamard-inversibles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1971-1972), exp. n° 16, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° 16, 10 p.

6 mars 1972

SÉRIES RATIONNELLES À PLUSIEURS VARIABLES NON COMMUTATIVES, HADAMARD-INVERSIBLES

par Khyra LAMÈCHE-GÉRARDIN

Sommaire

1. Définitions et propriétés générales.

Soient X un ensemble fini appelé alphabet, X^* le monoïde libre qu'il engendre. La multiplication dans X^* est la concaténation, i. e.

$$f * g = fg ,$$

on écrit g à droite de f.

L'élément neutre de X^* est noté e.

Si R est un anneau unitaire, on notera $R\langle\langle X\rangle\rangle$ l'algèbre large des séries formelles sur X, i. e.

$$r \in R\langle\langle X\rangle\rangle \Longleftrightarrow r = \sum_{f\in X^*} (r , f)f , \text{ où } (r , f) \in R , \quad \forall f \in X^* .$$

Si $(r , e) = 0$, on dira que la série r est quasi-inversible.

Notant r^* le quasi-inverse de r, on sait que r^* vérifie l'équation

$$r + rr^* = r + r^* r = r^*$$

on notera $R^{rat}\langle\langle X\rangle\rangle$ la plus petite sous-algèbre de $R\langle\langle X\rangle\rangle$ qui contienne X et qui est stable par quasi-inversion des éléments quasi-inversibles.

Rappelons un résultat de M. P. SCHÜTZENBERGER [8].

THÉORÈME. - Une série $r \in R\langle\langle X\rangle\rangle$ est rationnelle si, et seulement si, il existe un entier $N \geq 1$, une représentation μ de X^* dans $M_N(R)$, une matrice P de $M_N(R)$ telle que l'on ait :

$$r = \sum_{f\in X^*} (r , f) f = \sum_{f\in X^*} (\mathrm{Tr}\, P\, \mu f) f .$$

Remarque. - Si $|X| = 1$, i. e. X^* isomorphe à $\underset{\sim}{N}$, on retrouve la définition et les propriétés habituelles des séries rationnelles à une variable [6].

Sous-ensembles rationnels dans un monoïde. - Si M est un monoïde, la classe des sous-ensembles rationnels de M est la plus petite classe $\mathcal{E}$ des sous-ensembles de M satisfaisant les conditions suivantes :

(1) L'ensemble vide est dans $\mathcal{E}$,

(2) chaque sous-ensemble réduit à un point est dans $\mathcal{E}$,

(3) si A et $B \in \mathcal{E}$, alors $A \cup B \in \mathcal{E}$,

(4) si A , $B \in \mathcal{E}$, alors $AB \in \mathcal{E}$,

(5) si $A \in \mathcal{E}$, alors $A^* \in \mathcal{E}$.

On note $AB = (m \mid m = ab , a \in A , b \in B)$. A^* est le sous-monoïde de M engendré par A . X^* étant un monoïde libre de type fini, on a la définition suivante.

DÉFINITION. - Un sous-ensemble Y de X^* est reconnaissable, ou est un K-langage, s'il existe une congruence finie θ sur X^* pour laquelle Y est saturé.

Rappelons un résultat important.

THÉORÈME de Kleene [4]. - <u>Dans un monoïde libre de type fini, les ensembles rationnels et reconnaissables coïncident.</u>

Au point de vue théorie des automates, un K-langage, ou une partie régulière, est le langage associé à un état initial a_0 d'un automate $\mathcal{A}$ possédant un nombre fini d'états [5].

Du point de vue linguistique, on a le résultat suivant [3] : P^+ désigne l'ensemble des séries formelles engendrées par les grammaires linéaires d'un côté, et L_0^+ étant le plus petit semi-anneau contenant P^+ et stable par quasi-inversion des éléments quasi-inversibles, on a :

supp L_0^+ est l'ensemble des K-langages sur un vocabulaire fini.

Si $r = \sum (r , f) f$ est une série formelle, on notera

$$\text{supp } r \quad (\text{support } r) = \{f \mid (r , f) \neq 0\} .$$

Si $R = \underset{\sim}{Z}$, on dira qu'une série Z est positive si $(r , f) \geq 0$, $\forall f \in X^*$.

<u>Liens entre les séries rationnelles et les ensembles rationnels, ou K-langage</u>. - Un K-langage est le support d'une série rationnelle positive.

Si $A = \text{supp } a$, $B = \text{supp } b$, où a , b sont des séries rationnelles positives à coefficients entiers.

On vérifie facilement que :

$$A \cup B = \text{supp}(a + b) .$$

$$AB = \text{supp}(a \times b) .$$

Si $(a , e) = 0$, alors

$$A^* = \text{supp } a^* .$$

Notant $a \odot b = c$, le produit de Hademard de deux séries rationnelles a , b , on sait que c est rationnelle [9] et que $A \cap B = \text{supp } C$.

Le problème linguistique posé est le suivant : Etant donnés 2 K-langages A , C , soit B un langage tel que $A \cap B = C$. Dans quelles conditions B est-il un K-langage ?

Ceci rejoint directement un problème de théorie des nombres. Etant données 2 séries rationnelles a et c , dans quelle condition la série b est-elle rationnelle, b étant défini par la condition

$$a \odot b = c ,$$

i.e. c est le produit de Hadamard de a et c . Certains résultats de POLYA, portant sur la nature des coefficients de a , ont permis de répondre à cette question.

2. Interprétation en termes de représentations d'un théorème de Benzaghou [1].

Soit $|X| = 1$, et soit $a = \sum_n a_n X^n$, où $a_n \in \mathbb{Q}^*$ (ou $\mathbb{C}^*$) , une série rationnelle sur $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{C}$). BENZAGHOU a démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME. - $a = \sum_n a_n X^n$ est rationnelle ainsi que son inverse $\sum_n \frac{1}{a_n} X^n$ si, et seulement si, il existe un entier $m \geq 1$ et $2m$ rationnels non nuls $c_0\ c_1 \dots c_{m-1}$, $d_0 \dots d_{m-1}$ tels que l'on ait

$$a_{mr+i} = c_i\, d_i^r , \quad 0 \leq i \leq m-1 , \quad \forall\, r \geq 0 ,$$

i. e. la série a s'écrit

$$\text{(I)} \qquad a = \sum_{0 \leq i \leq m-1} \frac{c_i\, X^i}{1 - d_i\, X^m} .$$

Rappelons que si les $(a_n)_{n \geq 0}$ sont des entiers algébriques, coefficients d'une série rationnelle a , POLYA [7] a démontré que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ admettait un nombre fini de diviseurs premiers, si, et seulement si, la série a peut s'écrire sous la forme (I).

Soit $a = \sum_{n \geq 0} a_n X^n = \sum_{0 \leq i \leq m-1} c_i\, X^i/(1 - d_i\, X^m)$ une série rationnelle à une variable Hadamard-inversible, on sait qu'il existe un entier $N > 1$, deux matrices P , A de $M_N(\mathbb{C})$, telles que l'on ait :

$$a = \sum_n a_n X^n = \sum_n (\mathrm{Tr}\ P\ A^n)\ X^n = \sum c_i\, X^i/(1 - d_i\, X^m) , \quad 0 \leq i \leq m-1.$$

THÉORÈME 1. - Les séries rationnelles Hadamard-inversibles dans $\mathbb{Q}^{rat}[[X]]$, et même dans $K^{rat}[[X]]$ où K est un corps quelconque commutatif de caractéristique 0 , sont définies par les couples (P , A) , où

$$A = (\mathrm{diag}\ A_i)_{0 \leq i \leq m-1} ,$$

chaque A_i étant une matrice diagonale d'ordre m , inversible, dont les éléments diagonaux sont toutes les racines n-ièmes d'un même élément non nul, et

$$P = \frac{1}{m}\, (\mathrm{diag}\ c_i\, A_i^{-1})_{0 \leq i \leq m-1} ,$$

où les c_i $(0 \leq i \leq m-1)$ sont des éléments non nuls de $\mathbb{Q}$ ou K , i. e.

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & & & 0 \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{m-1} \end{pmatrix} \text{ où } A_i = \sqrt[m]{d_i} \begin{pmatrix} 1 = K_0 & & & \\ & K_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_{m-1} \end{pmatrix} = \sqrt[m]{d_i} \times A'$$

$$(t_j)^m = 1 \ , \quad \forall\ 0 \leqslant j \leqslant m - 1 \ ,$$

i. e.

$$A = A'' \otimes A' \quad \text{où} \quad A'' = \begin{pmatrix} \sqrt[m]{d_0} & & & 0 \\ & \sqrt[m]{d_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt[m]{d_{m-1}} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} P_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$P_i = (c_i/m) \times A_i^{-i}, \quad 0 \leqslant i \leqslant m - 1 \ .$$

Démonstration du théorème 1. – Soit $a = \sum_{0 \leqslant i \leqslant m-1} (c_i X^i)/(1 - d_i X^m)$ une série rationnelle Hadamard-inversible sur $\underset{\sim}{Q}$ représentée par le couple (P , A) où P et A ont la forme ci-dessus : soit n un entier, $n = mr + j$, $0 \leqslant j \leqslant m - 1$,

$$\operatorname{Tr} PA^n = \operatorname{Tr} P_0 A_0^n + \dots + \operatorname{Tr} P_i A_i^n + \dots + \operatorname{Tr} P_{m-1} A_{m-1}^n \ .$$

Pour chaque indice i $(0 \leqslant i \leqslant m - 1)$, on vérifie que, si $i \neq j$, on a :

$$\operatorname{Tr} P_i A_i^n = \operatorname{Tr} P_i A_i^{mr+j} = 0 \ ,$$

et que

$$\operatorname{Tr} P_j A_j^n = \operatorname{Tr} P_j A_j^{mr+j} = c_j d_j^r \ .$$

En effet,

$$\operatorname{Tr} P_i A_i^n = \operatorname{Tr} (c_i/m) \times A_i^{-i} \times A^{mr+j} = (c_i/m) \times \operatorname{Tr} A_i^{mr} A_i^{j-i} \ ,$$

si $j = i$, on a $A_i^{j-i} = I_m$, d'où $\operatorname{Tr} P_j A_j^n = (c_j/m) \times md_j^r = C_j d_j^r$,

si $j \neq i$, la matrice A_i^{j-i} est une matrice diagonale dont les coefficients sont de la forme : $(\sqrt[m]{d_i})^{j-i} \times K_\ell$, où K_ℓ est une racine m-ième de l'unité, d'où

$$\operatorname{Tr} P_i A_i^n = (c_i/m) \times d_i^r \times \operatorname{Tr} A_i^{j-i} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \ ,$$

et

$$\operatorname{Tr} P A^n = \operatorname{Tr} P A^{mr+j} = \operatorname{Tr} P_j A_j^r = c_j d_j^r \ , \quad \forall\ 0 \leqslant j \leqslant m - 1 \ , \quad \forall\ n \ .$$

Etant donnée une série rationnelle a Hadamard-inversible, soit b son inverse, i. e.

$$a = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n = \sum_n \operatorname{Tr} P A^n X^n \ , \quad b = \sum_n 1/a_n X^n = \sum (\operatorname{Tr} Q B^n) X^n \ .$$

On peut assez facilement caractériser Q et B à partir de A.

Si $A = A' \otimes A''$, alors $B = A'^{-1} \otimes A''^{-1}$;

$$\text{si}\quad B = \begin{pmatrix} B_0 & & & 0 \\ & B_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{m-1} \end{pmatrix}, \quad B_i = \left(\sqrt{\frac{1}{d_i}}\right) \times \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & K_j & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_{m-1} \end{pmatrix},$$

$$Q = (\mathrm{diag}\ Q_i)_{0\leq i\leq m-1}, \quad Q_i = \frac{1}{c_i} \times \frac{1}{m} \times B_i^{-i}, \quad 0 \leq i \leq m-1 .$$

On a

$$\mathrm{Tr}\ Q\ B^n = \mathrm{Tr}\ Q_0\ B_0^n + \dots + \mathrm{Tr}\ Q_i\ B_i^n + \dots + \mathrm{Tr}\ Q_{m-1}\ B_{m-1}^n ,$$

$$\text{si}\quad n = mr + j, \quad 0 \leq j \leq m-1 .$$

On vérifie comme précédemment que

$$\mathrm{Tr}\ Q\ B^n = \mathrm{Tr}\ Q\ B^{mr+j} = \frac{1}{c_i} \times \left(\frac{1}{d_i}\right)^r,$$

or $\mathrm{Tr}\ P\ A^n = c_i\ d_i^r$,

$$\mathrm{Tr}(PA^n \otimes QB^n) = \mathrm{Tr}(P \otimes Q) \times (A \otimes B)^n = 1, \quad \forall\ n \geq 1 .$$

Remarque. - Si $a = \sum_n a_n X^n = \sum_{0\leq i\leq m-1} (c_i X^i)/(1 - d_i X^m) = \sum_{n\geq 0} (\mathrm{Tr}\ PA^n)\ X^n$, la représentation de la série a, définie par la matrice A, n'est pas nécessairement la représentation minimale de la série a ; en effet, si les $(d_i)_{0\leq i\leq m-1}$ ne sont pas tous distincts, cette représentation peut être réduite, i. e. il existe un entier $N \leq m^2$, deux matrices P' et A' de $M_N(\mathbb{C})$, telles que l'on ait

$$\mathrm{Tr}\ PA^n = \mathrm{Tr}\ P'(A')^n, \quad \forall\ n \geq 0 ,$$

seulement cette représentation offre le double avantage d'être à la fois inversible et diagonisable.

3. Séries rationnelles à plusieurs variables non commutatives Hadamard-inversibles.

Soit $X = (x, y, \dots)$, $|X| \geq 2$, un alphabet fini, et soit

$$a = \sum_f (a, f)\ f = \sum_f (\mathrm{Tr}\ P\ \mu f)\ f ,$$

une série rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$, μ étant une représentation du monoïde libre X^* dans $M_N(\mathbb{C})$ pour un certain entier $N \geq 1$, et P une matrice de $M_N(\mathbb{C})$.

On suppose a Hadamard-inversible, i. e. il existe une série rationnelle $b = \sum(\mathrm{Tr}\ Q\ \nu f)\ f$, où ν est une représentation de X^* dans $M_r(\mathbb{C})$, et Q une matrice de $M_r(\mathbb{C})$ telle que l'on ait

$$a \odot b = \sum_{f\in X^*} f .$$

Posons $\mu x = A$. On suppose μx_i inversible, $\forall\ x_i \in X$. A admet la représentation additive unique ([2], p. 108-119) :

$$A = A_S + A_N ,$$

où A_S est diagonalisable, A_N nilpotente, $A_S\ A_N = A_N\ A_S$.

Considérant la série rationnelle à une variable $\sum_n (\mathrm{Tr}\ PA^n)\ T^n$, on sait qu'elle est Hadamard-inversible si la série a l'est ; on peut supposer que toutes les valeurs propres de A interviennent dans l'expression de $\mathrm{Tr}\ PA^n$. D'après l'interprétation matricielle des résultats de BENZAGHOU, cela équivaut à :

$$N = m^2 \ , \text{ si } \sum_{n\geq 0}(\mathrm{Tr}\ PA^n)\ T^n = \sum_{0\leq i\leq m-1} \frac{c_i\ T^i}{1 - d_i\ T^m} \ ,$$

et

$$\mathrm{Tr}\ PA^n = \mathrm{Tr}\ PA_s^n \ , \quad \forall\ n \geq 0 \ .$$

On se place dans la base où A_S est diagonale, et on écrit

$$A_S = \begin{pmatrix} (A_S)_0 & & 0 \\ & (A_S)_1 & \\ 0 & & (A_s)_{m-1} \end{pmatrix} \cdot \quad \text{où} \quad (A_S)_i = (\sqrt[m]{d_i}) \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & K_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_{m-1} \end{pmatrix} ,$$

$$K_j^m = 1 \ , \quad \forall\ 0 \leq j \leq m \ .$$

Dans cette base, P s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & & & \\ & P_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_{m-1} \end{pmatrix} + P'_0 \ , \text{ où } \ P_i = (c_i/m) \times A_i^{-i} \ , \quad c_i \in Q^* \ , \quad 0 \leq i \leq m-1 \ , \text{ et}$$

P'_0 est telle que $(P'_0)_{j,j} = 0 \ , \quad \forall\ 1 \leq j \leq m^2$.

Soit $f \in X^*$, il est immédiat, en considérant la série rationnelle suivante

$$r_f = \sum(\mathrm{Tr}\ P\ \mu f A^n)\ T^n) = \sum(\mathrm{Tr}\ P\ \mu f A_s^n)\ T^n \ ,$$

que cette série est rationnelle est Hadamard-inversible si la série a l'est.

<u>Se plaçant dans la base où</u> A_S <u>est diagonale</u>, <u>on explicite les coefficients de</u> r_f .

(II) $\mathrm{Tr}\ P\mu f\ A_S^n =$

$$= \sum_{1\leq j\leq m} (P\mu f)_{d_j} \times (\sqrt[m]{d_0})^n \times (K_j)^n + \dots + (\sqrt[m]{d_\ell})^n \sum_{1+m\ell\leq j\leq m(\ell+1)} (P\mu f)_{d_0} \times (K_j)^n$$
$$+ (\sqrt[m]{d_{m-1}})^n \sum_{1+m(m-1)\leq j\leq m^2} (P\mu f)_{d_j} \times (K_j)^n \ .$$

Posant $n = mr + i$, $0 \leq i \leq m-1$, (II) s'écrit :

$$\mathrm{Tr}\, P\mu f\, A_S^n = \mathrm{Tr}\, P\mu f\, A_S^{mr+i} = (d_0)^r \sum_{1\leq j\leq m} (P\mu f)_{d_j} \times (k_\gamma)^i \times (d_0)^{i/m} + \dots$$
$$+ (d_\ell)^r \sum_{1+m\ell\leq j\leq m(\ell+1)} (P\mu f)_{d_j} \times (k_\gamma)^i \times (d_\ell)^{i/m} + \dots$$
$$+ d_{m-1}^r \sum_{1+m(m-1)\leq j\leq m^2} (P\mu f)_j \times (k_\gamma)^i \times (d_{m-1})^{i/m} .$$

D'après la forme générale des coefficients d'une série rationnelle à une variable Hadamard-inversible, on sait qu'il existe un entier $u_f \geq 1$ et $2u_f$ rationnels non nuls : $v_0 \dots v_{u_f-1}\ w_0 \dots w_{u_f-1}$, telle que l'on ait :

$$\mathrm{Tr}\, P\mu f\, A_S^n = U_K\, W_K^{+}, \quad \text{où}\quad n = u_f\, t + K, \quad 0 \leq K \leq u_f - 1,$$

i. e. il existe ℓ tel que :

$$(\mathrm{III})\quad \left[\begin{array}{l} (1)\quad d_\ell^r \displaystyle\sum_{1+m\ell\leq j\leq m(\ell+1)} (P\mu f)_{d_j} \times (d_\ell)^{i/m} \times k_j^i = V_K\, W_K \neq 0 , \\ \qquad\qquad d_\ell = W_K . \\ (2)\quad \sum (P\mu f)_{d_j} \times d_q^{i/m} \times k_j^i = 0 , \quad \forall\ q \neq \ell \ \text{ et }\ 0 \leq q \leq m-1 . \end{array}\right.$$

On suppose que, pour tout $f \in X^*$, on a $u_f = m$.

Sous cette hypothèse, on a le lemme suivant :

LEMME. - <u>Pour tout</u> $f \in X^*$, <u>il existe une permutation</u>, <u>notée</u> σ_f, <u>des entiers</u> $(0, 1, \dots, m-1)$, <u>telles que l'on ait</u> :

$$P\mu f = \begin{pmatrix} (P\mu f)_0 & & 0 \\ & (P\mu f)_i & \\ 0 & & (P\mu f)_{m-1} \end{pmatrix} + N_f \quad \text{où}\quad (P\mu f)_i \in M_n(C), \quad \forall\ 0 \leq i \leq m-1,$$

$$(P\mu f)_i = (c_i'/m) \times A_i^{-\sigma f(i)} \quad \text{si}\quad A = [\mathrm{diag}(A_i)], \quad 0 \leq i \leq m-1 .$$

$c_i' \in \underset{\sim}{Q}^*$, et N_f est telle que $(N_f)_{jj} = 0$, $\forall\ 1 \leq j \leq m^2$.

<u>Démonstration du lemme</u>. - Le système (III) fournit les équations suivantes (on raisonne pour $\ell = 0$) :

$$(P\mu f)_{11} + \dots + (P\mu f)_{ii} + \dots + (P\mu f)_{mm} = 0 ,$$
$$(P\mu f)_{11} + (P\mu f)_{22} \times (K_1)^p + \dots + (P\mu f)_{mm} \times (K_{m-1})^p = \alpha \neq 0 ,$$
$$(P\mu f)_{11} + (P\mu f)_{22}\, (K_1)^{p+1} + \dots + (P\mu f)_{mm} \times (K_{m-1})^{p+1} = 0 ,$$
$$(P\mu f)_{11} + (P\mu f)_{22} \times (K_1)^{n-1} + \dots + (P\mu f)_{mm} \times (K_{m-1})^{m-1} = 0 .$$

Le déterminant des coefficients est un déterminant de VAN DER MONDE d'ordre m. On a donc un système de Cramer, or on a la solution évidente suivante :

$$(K_L)^{-p}\ (K_1)^{-p} \dots (K_{m-1})^{-p} ,$$

d'où

$$(P\mu f)_{d_j} = \lambda (K_j)^{-p} , \qquad \lambda \in \underset{\sim}{Q}^* ,$$

en désignant par r_f la permutation de $[0, \dots, m-1]$ qui est définie par

$$\sigma_f(p) = \ell \ , \text{ si } \ n = mr + p \ , \quad 0 \leq p \leq m-1 \ ,$$

et

$$\operatorname{Tr} P\mu f\, A^{mr+p} = c'_\ell\, d_\ell \ ,$$

on a donc :

$$P\mu f = \begin{pmatrix} (P\mu f)_0 & & 0 \\ & (P\mu f)_i & \\ 0 & & (P\mu f)_{m-1} \end{pmatrix} + N_f \ , \text{ où } \ (P\mu f)_i = \frac{c'_i}{m} \times A_i^{-\sigma_f(i)} \ ,$$

$c'_i \in \mathbb{Q}^*$, $\forall\ 0 \leq i \leq m-1$, et $(N_f)_{d_j} = 0$, $\forall\ 1 \leq j \leq m^2$.

le lemme est démontré.

Application. – Cas où $\mu x_i\, \mu x_j = \mu x_j\, \mu x_i$, $\forall\ x_i \in X$, i. e. μ est une représentation commutative. Dans ce cas, si $\mu f = (\mu f)_S + (\mu f)_N$, où $(\mu f)_S$ est une matrice diagonalisable, et $(\mu f)_N$ nilpotente, $(\mu f)_S$ et $(\mu f)_N$ sont des matrices qui commutent. L'application $f \longmapsto (\mu f)_S$ de X^* dans $M_{m^2}(\mathbb{C})$ est une représentation. Or

$$\operatorname{Tr} P\mu f = \operatorname{Tr} P(\mu f)_S \ , \quad \forall\ f \in X^* \ ,$$

on peut se ramener à une représentation dont toutes les matrices sont diagonales dans une même base. On suppose que P est diagonale dans cette base, d'où :

$$P\mu f = \begin{pmatrix} (P\mu f)_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (P\mu f)_{m-1} \end{pmatrix} \times N_f \ .$$

Il est immédiat que N_f est une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont nuls, i. e. $N_f = 0$, d'où

$$P\mu f = \begin{pmatrix} (P\mu f)_0 & & 0 \\ & (P\mu f)_i & \\ 0 & & (P\mu f)_{m-1} \end{pmatrix} , \quad (P\mu f)_i = \frac{c'_i}{m} \times A_i^{-\sigma_f(i)} \ ,$$

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & & & 0 \\ & P_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_{m-1} \end{pmatrix} , \quad P_i = \frac{c'_i}{m} \times A_i^{-i} \ \text{ si } \ A = (\operatorname{diag} A_i) \ , \quad 0 \leq i \leq m-1 \ ,$$

$$\mu f = \begin{pmatrix} \frac{c'_0}{c_0} \times A_0^{-\sigma_f(0)} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{c'_i}{c_i} \times A_i^{i-\sigma_f(i)} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{c'_{m-1}}{c_{m-1}} \times A_{m-1}^{m-1-\sigma_f(m-1)} \end{pmatrix}$$

De l'expression $\mu f\ \mu g = \mu fg$, on tire : $\mu fg = \mu f\ \mu g = (\mathrm{diag}\ \frac{c_i'''}{c_i} \times A_i^{\,i-\sigma fg(i)})$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$.

(IV) $$\sigma_{fg}(i) = -i + \sigma_f(i) + \sigma_g(i) .$$

(V) $$\frac{c_i'''}{c_i} = \frac{c_i'}{c_i} \times \frac{c_i''}{c_i} , \text{ si } \mu g = (\frac{c_i''}{c_i} \times A_i^{\,i-\sigma_g(i)}) , \quad 0 \leq i \leq m-1 .$$

Pour tout $f \in X^*$, on pose

$$\nu f = \begin{pmatrix} \frac{c_0}{c_0'} \times A_0'^{\,-\sigma_f(0)} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{c_i}{c_i'} \times A_i'^{\,i-\sigma_f(i)} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{c_{m-1}}{c_{m-1}'} \times A_{m-1}'^{\,m-1-\sigma_f(m-1)} \end{pmatrix} , \text{ où } A_i' = \sqrt[m]{\frac{1}{d_i}} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & K_j & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_{m-1} \end{pmatrix}$$

et $K_j^m = 1$, $\forall\ 0 \leq j \leqslant m-1$.

On vérifie que $\nu f\ \nu g = \nu fg$. En effet, si $a = bc$, $a , b , c \in \underset{\sim}{C}^*$, on a $a^{-1} = b^{-1}\ c^{-1}$, d'où

$$\nu fg = (\frac{c_i}{c_i'''} \times A_i'^{\,i-\sigma_{fg}(i)}) , \quad 0 \leq i \leqslant m-1 ,$$

or, $\forall\ 0 \leq i \leq m-1$, on a :

$$\frac{c_i}{c_i'''} \times A_i'^{\,i-\sigma_f(i)} = \frac{c_i}{c_i'} \times \frac{c_i}{c_i''} \times A_i'^{\,i-\sigma_f(i)} \times A_i'^{\,i-\sigma_g(i)} ,$$

d'où $\nu fg = \nu f\ \nu g$, i. e. ν est une représentation de X^* dans $M_{m^2}(\underset{\sim}{C})$. Soit

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_0 \times m} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{c_i \times m} \times A_i'^{\,-i} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{1}{c_{m-1} \times m} \times A_{m-1}'^{\,-m+1} \end{pmatrix} , \ \mathrm{Tr}\ Q\nu f = 1/c_\ell' ,$$

où $\sigma_f(\ell) = 0$, or $\mathrm{Tr}\ P\mu f = c_\ell'$, où $\sigma_f(\ell) = 0$,

$$\mathrm{Tr}\ P\mu f\ \mathrm{Tr}\ Q\nu f = \mathrm{Tr}\ P\mu f \otimes Q\nu f = \mathrm{Tr}(P \otimes Q)(\mu f \otimes \nu f) = 1 , \quad \forall\ f \in X^* .$$

Dans le cas où la représentation μ est commutative, on a trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que la série rationnelle de terme général $\mathrm{Tr}\ P\mu f$ soit Hadamard-inversible :

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU (B.). - Algèbres de Hadamard, Thèse Sc.Math. Paris, 1969.

[2] BOURBAKI (N.). - Algèbre, Chap.8 : Modules et anneaux semi-simples. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Bourbaki, 23).

[3] CHOMSKY (N.) and SCHÜTZENBERGER (M. P.). - The algebraic theory of context-free languages, Computer programming and formal systems, p. 118-161. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1963 (Studies in Logic).

[4] EILENBERG (S.). - Homotopie et espaces fibrés. Cours professé à l'Institut Henri Poincaré, 1966/67. - Paris, Secrétariat mathématique de l'Ecole Normale Supérieure, 1968.

[5] JAULIN (B.) - Théorie des automates (multigraphié).

[6] LAMÈCHE (Khyra). - Extension d'un théorème de Polya-Cantor à des séries rationnelles en variables non commutatives, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 9, 12 p.

[7] POLYA (G.). - Arithmetische Eigenschaften der Reihentwicklungen rationaler Funktionen, J. für die reine und angew. Math., t. 151, 1921, p. 1-31.

[8] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Definition of a family of automata, Information and Control, t. 4, 1961, p. 245-270.

[9] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - On a theorem of R. Jungen, Proc. of the Amer. math. Soc., t. 13, 1962, p. 885-890.

(Texte reçu le 20 mars 1972)

Khyra LAMÈCHE-GÉRARDIN
7 rue Barrault
75013 PARIS