Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Yves Meyer

Nombres premiers et vibrations

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1971-1972), exp. n° 15, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A3_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° 15, 5 p.

28 février 1972

NOMBRES PREMIERS ET VIBRATIONS

par Yves MEYER

Le théorème de Hadamard - de La Vallée-Poussin sur la répartition des nombres premiers permet de décrire l'évolution asymptotique de certaines vibrations de membranes carrées.

1. Description des vibrations continues de la membrane.

Soient C le carré ouvert $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, $\bar{C}$ le carré fermé $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, et ∂C le bord de C ; $\partial C = \bar{C} \setminus C$.

Soit $\Omega = C \times \underset{\sim}{R}$, et soit $\partial\Omega = \partial C \times \underset{\sim}{R}$ le bord de Ω . Enfin $\bar{\Omega} = \bar{C} \times \underset{\sim}{R}$ est la fermeture de Ω .

Considérons l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

dans Ω avec les conditions au bord

$$u|_{\partial\Omega} = 0 . \tag{2}$$

Des solutions particulières du système (1), (2) sont données par

$$u_{m,n} = \sin mx \sin ny \exp \pm i\sqrt{m^2 + n^2}\, t , \tag{3}$$

et toute somme finie $\sum a_{m,n} u_{m,n}$, où $a_{m,n} \in \underset{\sim}{C}$, est encore solution du système (1), (2). Il en résulte évidemment que les fonctions continues $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ qui sont, pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\bar{\Omega}$, des limites de sommes finies $\sum a_{m,n} u_{m,n}$ sont encore des solutions du système (1), (2) ; cette fois (1) est vraie au sens des distributions.

Réciproquement, toute fonction continue $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \underset{\sim}{C}$, qui vérifie (1) au sens des distributions et qui satisfait à (2), peut être construite par le procédé que nous venons de décrire. Plus précisément, on peut représenter u par une "série de Fourier"

$$\begin{aligned} u(x , y , t) \sim \textstyle\sum_{m,n\geqslant 1} a_{m,n} \sin mx \sin ny \cos \sqrt{m^2 + n^2}\, t \\ + \textstyle\sum_{m,n\geqslant 1} b_{m,n} \sin mx \sin ny \sin \sqrt{m^2 + n^2}\, t . \end{aligned} \tag{4}$$

Les "coefficients de Fourier" $a_{m,n}$ et $b_{m,n}$ se calculent par

(5) $a_{m,n} \cos\sqrt{m^2+n^2}\, t + b_{m,n} \sin\sqrt{m^2+n^2}\, t$

$$= \frac{4}{\pi^2} \iint_C u(x , y , t) \sin mx \sin ny \, dx\, dy$$

(On regarde ici t comme un paramètre).

La convergence la série (4) vers u a lieu au sens suivant : pour toute fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2, à support compact,

$$v(x , y , t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x , y , t - s)\, h(s)\, ds$$

est une solution presque périodique du système (1), (2) dont la série de Fourier est absolument convergente. Si, h étant fixée une fois pour toutes, on applique la remarque précédente à $h_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $h_k(t) = kh(kt)$, on obtient une suite v_k de "bonnes solutions" de (1), (2), dont la série de Fourier est absolument convergente, et telle que $v_k \longrightarrow u$, $(k \longrightarrow +\infty)$, uniformément sur tout compact de $\overline{\Omega}$. Nous avons donc montré comment faire la synthèse d'une solution continue u à partir de combinaisons linéaires des solutions particulières (3).

2. Energie d'une solution.

L'énergie d'une solution u dont la série de Fourier est donnée par (4) peut être définie brutalement par

$$E(u) = \sum_{m,n\geq 1} (m^2 + n^2)(a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2) .$$

Elle est finie ou infinie.

Si u est régulière, par exemple si u est de classe C^1 en l'ensemble des variables, on démontre que cette énergie est

(6) $$E(u) = \frac{2}{\pi^2} \iint_C \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dx\, dy$$

et le nombre de droite de (6) ne dépend pas de t.

3. Solutions d'énergie finie qui ne sont pas presque périodiques.

THÉORÈME. - *On peut trouver une fonction continue $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui soit solution, au sens des distributions, de (1) sur l'ouvert Ω, qui soit nulle sur $\partial\Omega$, d'énergie finie, et telle que, pour presque tout $(x , y) \in C$,*

(7) $$\overline{\lim}_{t\to+\infty} |u(x , y , t)| = +\infty .$$

En particulier, $t \longrightarrow u(x , y , t)$ n'est pas une fonction presque périodique lorsque (7) a lieu.

La solution u sera déterminée par les "conditions au bord" $u|_{\partial\Omega} = 0$, $u(x , y , 0) = u_0$ et, au sens des distributions, $\frac{\partial u}{\partial t}(x , y , 0) = 0$ sur C.

Nous montrerons que presque toutes (en un sens qui sera précisé) les fonctions continues $u_0 : \overline{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, nulles sur le bord de C, conduisent à des solutions

u de l'équation des ondes vérifiant (7).

4. Sommes de deux carrés et nombres premiers.

LEMME 1. - *Tout nombre premier* $p \equiv 1 \pmod 4$ *est somme de deux carrés.*

Plus précisément, on peut écrire, de façon unique, $p = m^2 \;\; n^2$ avec $0 < m < n$.

LEMME 2. - *Soit* $2 = p_1 < p_2 < \dots$ *la suite croissante des nombres premiers. Alors, pour tout* $k \geqslant 2$, $\sqrt{p_k}$ *n'appartient pas au corps* $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{k-1}})$.

En d'autres termes, pour tout $k \geqslant 1$, $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_k})$ est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$ de degré 2^k.

Voici une démonstration de ce résultat sans doute bien connu. Nous allons construire un nombre premier $p > p_k$ tel, qu'en localisant par rapport à p, $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{k-1}}$ deviennent rationnels dans $\mathbb{Q}_p$ tandis que $\sqrt{p_k}$ reste irrationnel. Le lemme 2 en résultera.

La détermination des carrés de $\mathbb{Q}_p$ montre qu'il suffit que $p > p_k$, que $p_1, \dots, p_{k-1}$ soient des résidus quadratiques $\pmod p$, mais que p_k ne soit pas un résidu quadratique $\pmod p$. Dire que $p_1 = 2$ est résidu quadratique $\pmod p$ revient à écrire que $p \equiv \pm 1 \pmod 8$. En nous restreignant à $p \equiv 1 \pmod 8$, on peut utiliser la loi de réciprocité quadratique pour exprimer les autres conditions portant sur p. Soit α, $2 \leqslant \alpha \leqslant p_k - 1$, un entier qui n'est pas un résidu quadratique $\pmod{p_k}$. Il nous suffit de trouver un nombre premier p tel que $p \equiv 1 \pmod 8$, $p \equiv 1 \pmod{p_j}$, $2 \leqslant j \leqslant k-1$, et $p \equiv \alpha \pmod{p_k}$. Tout cela s'écrit $p \equiv \beta \pmod{8\, p_2 \dots p_k}$; β et $8\, p_2 \dots p_k$ sont premiers entre eux, et le théorème de Dirichlet montre qu'il y a une infinité de choix possibles de p.

LEMME 3. - *Soit* S *l'ensemble des nombres premiers* p *congrus à* $1 \pmod 4$. *Alors*

(8) $$\sum_{p \in S} \frac{1}{p \log \log p} = +\infty ,$$

(9) $$\sum_{p \in S} \frac{1}{p(\log \log p)^2} < +\infty .$$

Cela résulte du théorème de Hadamard - de La Valée-Poussin donnant la densité des nombres premiers appartenant à $4\mathbb{Z} + 1$.

5. Fin de la preuve.

Nous chercherons u sous la forme d'une série

(10) $$u(x, y, t) = \sum_{p \in S} \frac{\omega_p}{p(\log \log p)} \sin mx \sin ny \cos \sqrt{p}\, t ,$$

où p est écrit, de façon unique, $p = m^2 + n^2$ avec $0 < m < n$, et où les $\omega_p = \pm 1$ seront choisis ultérieurement. Nous montrerons que, par un choix convenable des ω_p , des sommes partielles de la série convergent uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction continue $u(x, y, t)$. Cette fonction est, par construction même, une solution de (1) et (2) d'énergie finie. Montrons que $\overline{\lim}_{t\to+\infty} |u(x, y, t)| = +\infty$ presque partout sur C . Supposons, au contraire, qu'il existe un ensemble de mesure positive E de C et une constante M , telle que si $(x, y) \in E$, $\sup_{t\geq 0}|u(x, y, t)| \leq M$. Soit h une fonction indéfiniment dérivable, à support compact, d'intégrale égale à 1 , nulle pour $s \leq 0$. Considérons

$$v(x , y , t) = \int_0^{\infty} u(x , y , t + s) h(s) ds .$$

Alors, si $(x, y) \in E$, $\sup_{t\geq 0}|v(x , y , t)| \leq M$.

Par ailleurs, pour tout (x, y) fixé, v est une fonction presque périodique de t dont les fréquences appartiennent à l'ensemble des $\sqrt{p}$, $p \in S$. Cet ensemble est linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$, et le théorème de Kronecker ([2], p. 176, théorème II) donne, appliqué à v ,

$$(11) \qquad \sum_{p\in S} \frac{1}{p(\log \log p)} \left|\int_0^{\infty} h(s) \cos \sqrt{m^2 + n^2}\, s\, ds\right| |\sin mx \sin ny| \leq M .$$

Puisque M ne dépend pas de h , on peut supposer que $h = h_\varepsilon$ approche faiblement une masse de Dirac placée en 0 . Alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{+\infty} h_\varepsilon(s) \cos \sqrt{m^2 + n^2}\, s\, ds = 1 ,$$

et l'inégalité de Fatou donne

$$(12) \qquad \sum_{p\in S} \frac{|\sin mx|\ |\sin ny|}{p(\log \log p)} \leq M \quad \text{si} \quad (x , y) \in E .$$

A fortiori, on a

$$(13) \qquad \sum_{p\in S} \frac{\sin^2 mx \sin^2 ny}{p(\log \log p)} \leq M .$$

Soit $\gamma_{m,n} = \int_E \cos 2mx \cos 2ny\, dx\, dy$. La relation de Parseval appliquée à la fonction caractéristique de E donne : $\sum_{m,n} \gamma_{m,n}^2 < +\infty$. Il en résulte que la série $\sum_{p\in S} \gamma_{m,n}/p(\log \log p)$ est absolument convergente.

En intégrant (13) sur E , on obtient

$$\sum_{p\in S} \frac{1}{p(\log \log p)} \leq \frac{4M}{\text{mes } E}$$

ce qui contredit le lemme 3.

Le lemme suivant achève la démonstration de notre théorème.

LEMME 4. - <u>Soit</u> E <u>un espace vectoriel de dimension finie sur</u> $\mathbb{R}$ <u>et soit</u> $|\ |^2$ <u>une forme quadratique définie positive sur</u> E ; <u>le produit scalaire correspondant est noté</u> $\langle\ ,\ \rangle$.

Soit $(y_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de E telle que

(a) $\inf_{n\neq m}|y_n - y_m| > 0$ et $|y_1| < |y_2| < \dots$

(b) Il existe un $\alpha > 0$ tel que $|y_n| = O(n^{\alpha})$.

Soit $(\varphi_n(\omega))_{n\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli (les φ_n sont indépendantes et prennent chacune la valeur ∓ 1 avec la probabilité 1/2).

Soit enfin $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que, en posant $s_k = (\sum_{2^k}^{2^{k+1}} |a_n|^2)^{1/2}$, on ait

$$\sum_{k\geq 1} \sup(s_k , s_{k+1} , \dots) < +\infty .$$

Alors, si on excepte un ensemble de mesure nulle de positions de ω (c'est-à-dire de choix de la suite des ± 1) , les sommes d'ordre $2^{(2^k)}$ de la série

$$\sum_{n\geq 1} a_n \varphi_n(\omega) \exp 2\pi i\langle x , y_n\rangle$$

convergent uniformément sur tout compact de E vers une fonction continue.

La preuve du lemme 4 s'obtient en modifiant très légèrement celle des résultats semblables de [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] KAHANE (J.-P.). - Some random series of functions. - Lexington, Heath and Company, 1968 (Heath mathematical Monographs).

[2] KAHANE (J.-P.) et SALEM (R.). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).

[3] SERRE (J.-P.). - Cours d'arithmétique. - Paris, Presses Universitaires de France, 1970 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 2).

(Texte reçu le 20 mars 1972)

Yves MEYER
Mathématiques, Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
91 - ORSAY