Martine Pathiaux

Détermination effective des polynômes de A. Connes relativement à un nombre de Pisot

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, nº 2 (1971-1972), exp. nº G5, p. G1-G3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A15_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° G5, 3 p.

17 janvier 1972

DÉTERMINATION EFFECTIVE DES POLYNÔMES DE A. CONNES RELATIVEMENT À UN NOMBRE DE PISOT

par Martine PATHIAUX

On se propose de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. - Soient Ω un corps algébriquement clos, muni d'une valeur absolue et, K un sous-corps de Ω ; soit $B(x) \in K[x]$ un polynôme de degré s , séparable, ayant dans Ω , une racine de module > 1 et les autres de module < 1 , il existe alors $D(x) \in K[x]$ tels que :

$$D(x) = B(x)\ C(x)\ , \quad C(x) \in K[x]\ ,$$

où $D(x) = d_s\ x^n + d_{s-1}\ x^{n-1} + d_{s-2}\ x^{s-2} + \ldots + d_0$ avec $|d_{s-1}| > \sum_{i=0, i\neq s-1}^{s} |d_i|$.

La démonstration du théorème permet en outre de calculer explicitement les polynômes $D(x)$. Alain CONNES [1] a démontré ce résultat dans le cas restrictif où $\Omega = \underset{\sim}{C}$, $K = \underset{\sim}{Q}$, $B(x)$ irréductible. D'autre part, la démonstration de Alain CONNES n'est pas effective.

Démonstration du théorème. - Posons $B(x) = b_0 + b_1\ z + \ldots + b_s\ z^s$, et effectuons la division de z^n par $B(x)$ dans $K[x]$. Soit

$$(1)\quad z^n = (b_s z^s + b_{s-1} z^{s-1} + \ldots + b_0)(c_{n,n-s} z^{n-s} + \ldots + c_{n,0}) + a_{s-1,n} z^{s-1} + \ldots + a_{0,n}\ .$$

D'après une remarque de J.-L. NICOLAS, on constate que lorsque n varie, avec k fixe, $a_{k,n}$ vérifie la relation de récurrence :

$$(2)\quad b_s\ a_{k,n} + b_{s-1}\ a_{k,n-1} + \ldots + b_0\ a_{k,n-s} = 0 \quad (\forall n \geq s\ , \quad 0 \leq k \leq s-1)\ .$$

avec les conditions $a_{k,j} = \delta_{k,j}$ si $j \leq s-1$.

Pour le montrer, il suffit d'écrire la relation (1) pour les indices n , $n-1$, ... , $n-s$ multipliés respectivement par b_s , b_{s-1} , ... , b_0 , de les ajouter, et d'écrire que le reste de la division de $b_s\ z^n + b_{s-1}\ z^{n-1} + \ldots + b_0\ z^{n-s}$ par $B(x)$ est identiquement nul.

Les relations (2) donnent donc :

$$(3)\qquad a_{k,n} = \lambda_k^{(1)}\ \theta_1^n + \lambda_k^{(2)}\ \theta_2^n + \ldots + \lambda_k^{(s)}\ \theta_s^n\ , \quad 0 \leq k \leq s-1\ ,$$

où θ_1 , ... , θ_s sont les racines de $B(x)$, et où les λ_k^j sont déterminées par le système :

$$(4) \qquad \lambda_k^{(1)}\,\theta_1^j + \dots + \lambda_k^{(s)}\,\theta_s^j = \delta_{k,j} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant j \leqslant s-1 \\ 0 \leqslant k \leqslant s-1 \end{cases}$$

dont le déterminant D a la valeur $\prod_{i\neq j,1\leqslant i\leqslant s} (\theta_i - \theta_j)_{1\leqslant j\leqslant s} \neq 0$, et les $a_{k,n}$ sont donc entièrement déterminés par (3) et (4).

Déterminons maintenant d_s , d_{s-1} , ... , $d_0 \in K$ tels que le reste de la division de $d_s\, z^n + d_{s-1}\, z^{n-1} + d_{s-2}\, z^{s-2} + \dots + d_0$ par $B(x)$ soit nul. Il suffit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} d_s\, a_{s-1,n} + d_{s-1}\, a_{s-1,n-1} = 0 \\ d_s\, a_{s-2,n} + d_{s-1}\, a_{s-2,n-1} + d_{s-2} = 0 \\ \dots \\ d_s\, a_{k,n} + d_{s-1}\, a_{k,n-1} + d_k = 0 \\ \dots \\ d_s\, a_{0,n} + d_{s-1}\, a_{0,n-1} + d_0 = 0 \end{cases}$$

qui a la solution :

$$(5) \quad d_s = a_{s-1,n-1}\ , \quad d_{s-1} = -\,a_{s-1,n}\ , \ \dots\ , \quad d_k = -\,a_{k,n}\, a_{s-1,n-1} + a_{s-1,n}\, a_{k,n-1}\ , \quad 0 \leqslant k \leqslant s-2\ .$$

Évaluons ces coefficients si on suppose $|\theta_1| > 1 > |\theta_2| \geqslant |\theta_3| \dots \geqslant |\theta_s|$, on obtient :

$$\begin{cases} d_s = \lambda_{s-1}^{(1)}\, \theta_1^{n-1} + O(\theta_2^n) \\ d_{s-1} = -\,\lambda_{s-1}^{1}\, \theta_1^n + O(\theta_2^n) \\ d_k = \theta_1^n\, O(\theta_2^n) \end{cases}$$

où les O ne dépendent que des λ_k^j et des θ_i , et donc uniquement des θ_i . Il existe donc une constante C ne dépendant que des θ_i telle que si

$$(6) \qquad |\lambda_{s-1}^{(1)}|\left(1 - \frac{1}{|\theta_1|}\right) > C|\theta_2|^n\ ,$$

alors

$$|d_{s-1}| > \sum_{i=0,\, i\neq s-1}^{s} |d_i|\ .$$

Or $\lambda_{s-1}^1 = (-1)^s/(\prod_{2\leqslant j\leqslant s} (\theta_1 - \theta_j)^2)$ est donc $\neq 0$, et la relation (6) est vérifiée pour $n \geqslant n_0\,(\theta_i)$.

Donc, pour trouver un polynôme $D(x)$ répondant au problème, il suffit de calculer par récurrence, à l'aide de (2), les coefficients $a_{k,n}$ jusqu'à un rang suffisament grand et d'utiliser les formules (5).

On peut calculer n_0 en fonction des θ_i à l'aide des formules (4) et (5), et on trouvera des solutions si $n - 1 > - C/\log|\theta_2|$ où C est une constante ne dépendant que de s , $|\theta_1|$, $\prod_{1\leqslant i\leqslant s, 1\leqslant j\leqslant s} (\theta_i - \theta_j)$.

A titre d'exemple, le polynôme $z^2 - 2z - 1$ admet pour multiple $2z^3 - 5z^2 + 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CONNES (Alain). - Ordres faibles et localisation de zéro de polynômes, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 18, 11 p.

(Texte reçu le 15 novembre 1972)

Martine PATHIAUX
Avenue de Paris
78470 SAINT RÉMY LES CHEVREUSES