Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

YVETTE AMICE

Intégration p-adique, selon A. Volkenborn

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1971-1972), exp. n° G4, p. G1-G9
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A14_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° G4, 9 p.

10 janvier 1972

INTÉGRATION p-ADIQUE, SELON A. VOLKENBORN

par Yvette AMICE

On a cherché depuis longtemps à construire une théorie de l'intégration p-adique c'est-à-dire une mesure de Haar à valeurs dans un corps p-adique définie sur un groupe abélien localement compact bien choisi. On trouvera des exposés détaillés de ces théories dans [2], [4], [5], [6], et [7]. Nous donnons au § 1 un résumé très succinct de quelques-uns des résultats obtenus : on verra que les applications arithmétiques de ces théories sont fort limitées puisque, par exemple, il n'existe aucune mesure de Haar sur l'anneau $\underset{\sim}{Z}_p$ des entiers p-adiques et à valeurs dans $\underset{\sim}{Q}_p$ pour laquelle les polynômes non constants soient intégrables.

C'est pourquoi A. VOLKENBORN, renonçant à l'invariance par translation, a construit une intégrale p-adique ; le § 2 est consacré à la définition de cette intégrale, et le § 3 à quelques applications arithmétiques.

On verra que, si cette intégrale n'a pas d'aussi bonnes propriétés fonctionnelles qu'une mesure de Haar, puisqu'elle n'est pas invariante par translation, elle a par contre de bonnes propriétés arithmétiques.

1. Intégration non archimédienne.

Soit G un groupe abélien localement compact, et soit K un corps valué complet non archimédien. Pour que l'algèbre $\mathcal{C}(G, K)$ des fonctions continues sur G à valeurs dans K sépare les points de G, on supposera G <u>totalement discontinu</u>.

Soit $\mathcal{C}_0(G, K)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(G, K)$ constitué des fonction tendant vers 0 à l'infini muni de la topologie de la convergence compacte.

Une mesure de Haar sur G, et à valeurs dans K, est alors une forme linéaire μ sur un sous-espace H de $\mathcal{C}_0(G, K)$, invariante par translation (ce qui signifie que : 1° $\forall f \in H$, $\forall a \in G$, $f_a \in H$, où $f_a(x) = f(x - a)$; et 2° $\forall f \in H$, $\forall a \in G$, $\mu(f) = \mu(f_a)$).

F. TOMAS [7] a montré (voir aussi F. BRUHAT [2]) que si $G = K = \underset{\sim}{Q}_p$, <u>le plus grand sous-espace</u> H, <u>sur lequel on puisse définir une telle mesure de Haar, est strictement contenu dans l'espace des fonctions différentiables à dérivée partout nulle.</u>

On voit d'ailleurs que si μ est une telle mesure de Haar,

$$\mu(\chi_{a+p^n \underset{\sim}{Z}_p}) = 1/p^n ,$$

où $n \in \underset{\sim}{Z}$ et χ_B désigne la fonction caractéristique de B. Alors si f est une fonction intégrable sur $\underset{\sim}{Z}_p$, son intégrale est la limite des sommes de Riemann

$$\sum_{i=1}^{p^n} \mu(\chi_{a_{i,n}+p^n \underset{\sim}{Z}_p}) f(a_{i,n}) = 1/p^n \sum_{i=1}^{n} f(a_{i,n}) \ ,$$

lorsque $n \to \infty$, où $(a_{i,n})_{i=1,\ldots,p^n}$ désigne un système quelconque de représentants de $\underset{\sim}{Z}_p/p^n \underset{\sim}{Z}_p$.

Dans [4], MONNA et SPRINGER étudient plus généralement les mesures de Haar définies sur un groupe G abélien localement compact et totalement discontinu, pour lesquelles les fonctions continues à support compact sont intégrables.

Ils y démontrent en particulier la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Soit $p > 0$, la caractéristique résiduelle de K , alors il existe une mesure de Haar sur G à valeurs dans K (satisfaisant à la condition ci-dessus) à la condition nécessaire et suffisante que G soit p-fini.

On dit que G est p-fini si, pour tout sous-groupe ouvert compact H_0 de G , il existe une constante M telle que, pour tout sous-groupe ouvert compact H de H_0 , on ait $v_p([H_0:H]) \leqslant M$.

Ceci montre en particulier qu'il existe une telle mesure de Haar sur $\underset{\sim}{Q}_p$ à valeurs dans $Q_{p'}$ à la condition nécessaire et suffisante que $p \neq p'$. Cette théorie de l'intégration a été développée en particulier par VAN ROOIJ et SCHIKHOFF, ([5] et [6]).

2. L'intégrale de Volkenborn.

Elle est définie sur la classe des groupes qui sont limite inductive dénombrable de groupes pro-finis. Nous donnerons une indication sur le cas général en 2.4, mais traiterons d'abord du cas particulier du groupe additif de $\underset{\sim}{Q}_p$

2.1. Intégrales p-adiques. - Soit f une fonction définie sur $\underset{\sim}{Q}_p$ à valeurs dans $\underset{\sim}{Q}_p$, et soient $(a_{i,n})_{i=1,\ldots,p^n}$ des représentants de $\underset{\sim}{Z}_p/p^n \underset{\sim}{Z}_p$. Nous avons vu que, pour les fonctions intégrables au sens de TOMAS, l'intégrale sur $\underset{\sim}{Z}_p$ est limite des sommes de Riemann

$$1/p^n \sum_{i=1}^{p^n} f(a_{i,n}) \ .$$

L'idée de Volkenborn consiste à prendre encore comme intégrale la limite de cette somme, mais en se restreignant à une suite fixée de systèmes de réprésentants modulo p^n . L'intégrale obtenue dépend des représentants choisis, mais la convergence des sommes de Riemann est une condition bien plus faible que l'intégrabilité au sens de TOMAS.

DÉFINITION 1. - Nous noterons $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_n)_{n\geq 0}$ une "suite de systèmes de représentants" c'est-à-dire une suite $\mathcal{R}_n$ telle que $\mathcal{R}_n$ soit un système de représentants de $\underset{\sim}{Q}_p$ modulo $p^n \underset{\sim}{Z}_p$.

DÉFINITION 1 bis. - Nous noterons $R = (R_n)_{n\geq 0}$ la suite canonique de systèmes de représentants définie par

$$R_n = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid x = \sum_{h=h_0}^{n-1} x_h p^h ,\ 0 \leq x_h < p ,\ h_0 \in \mathbb{Z}\} .$$

DÉFINITION 2. - Soit K ouvert compact de $\mathbb{Q}_p$, une fonction en escalier sur K est une fonction localement constante sur K. Une telle fonction f est dite d'ordre n sur K si

(a) K est réunion de classes modulo $p^n \mathbb{Z}_p$;

(b) $f = \sum f(x) \chi_{x+p^n\mathbb{Z}_p}$, où x parcourt un système de représentants de K modulo $p^n \mathbb{Z}_p$.

Si f est une fonction en escalier d'ordre n sur K, et $\mathcal{R}$ une suite de système de représentants, on pose

$$\int_K^{(\mathcal{R})} f(u)\, du = 1/p^n \sum_{x\in\mathcal{R}_n\cap K} f(x) .$$

On vérifie immédiatement que cette quantité est indépendante de n, et même de $(\mathcal{R})$, s'agissant de fonctions en escalier.

On dit qu'une fonction f en escalier sur $\mathbb{Q}_p$ est intégrable sur $\mathbb{Q}_p$ si $\lim_{n\to\infty} \int_{p^n\mathbb{Z}_p} f(u)\, du$ existe, on note alors $\int_{\mathbb{Q}_p} f(u)\, du$ cette limite. On montre aisément qu'une fonction en escalier est intégrable si, et seulement si, elle tend vers zéro à l'infini.

DÉFINITION 3. - Une fonction f, définie sur K, est $\mathcal{R}$-réglée sur K si la suite des fonctions en escalier

$$f_n = \sum_{x\in\mathcal{R}_n\cap K} f(x) \chi_{x+p^n\mathbb{Z}_p} ,$$

est telle que $\lim_{n\to\infty} \int_K^{(\mathcal{R})} f_n(u)\, du$ existe. On note cette limite $\int_K^{(\mathcal{R})} f(u)\, du$.

On montre aisément les propriétés suivantes :

(i) les fonctions $(\mathcal{R})$-réglées sur K constituent un espace vectoriel, $\int_K^{(\mathcal{R})} f(u)\, du$ définit une semi-norme sur cet espace ;

(ii) dire que f est $(\mathcal{R})$-réglée sur K équivaut à

$$\lim_{n\to\infty} 1/p^n \sum_{x\in\mathcal{R}_n\cap K} f(x) \text{ existe, et vaut } \int_K^{(\mathcal{R})} f(u)\, du ;$$

(iii) si f est $(\mathcal{R})$-réglée sur 3 des ensembles K, K', $K\cap K'$ et $K\cup K'$, elle l'est sur le quatrième, et

$$\int_K f(u)\, du + \int_{K'} f(u)\, du = \int_{K\cap K'} f(u)\, du + \int_{K\cup K'} f(u)\, du ;$$

(iv) il faut remarquer que dans (iii), on ne peut pas supposer seulement f $\mathcal{R}$-réglée sur K et K' ; en effet, elle peut ne pas l'être sur $K\cap K'$ et $K\cup K'$.

Par exemple, soit φ une fonction quelconque sur $\{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x| = 1\}$ et soit $f(x) = (-1)^{v(x)} \varphi(xp^{-v(x)})$. Soient

$$K = \{x \mid 1/p \leqslant |x| < p\} \quad \text{et} \quad K' = \{x \mid 1/p < |x| \leqslant p\} ,$$

alors

$$\sum_{x \in R_n \cap K} f(x) = \sum_{x \in R_n \cap K'} f(x) = 0 ,$$

donc f est réglée sur K et K', mais a été choisie quelconque sur $K \cap K'$.

Exemples.

(1) A la fonction $f(x) = x$ est associée la suite de fonctions en escalier

$$f_n(t) = \sum_{x \in \mathcal{R}_n} x \chi_{x + p^n \mathbb{Z}_p}(t) .$$

On voit, par un calcul simple, que

$$\int^R_{|u|=1} f(u)\, du = 0 , \qquad \int^R_{\mathbb{Z}_p} f(u) = -1/2 .$$

Notons R' une suite de système de représentants telle que

$$R'_n \cap \mathbb{Z}_p = \{1 , 2 , \dots , p^n\} ;$$

alors $\int^{R'}_{\mathbb{Z}_p} f(u)\, du = +1/2$.

On voit ainsi que la valeur de l'intégrale dépend de $\mathcal{R}$. Soit aussi R'', défini par $R''_{2n} = R_{2n}$ et $R''_{2n+1} = R'_{2n+1}$: la fonction f ci-dessus, n'est pas R''-réglée.

(2) Pour $k \geqslant 1$,

$$\int^R_{\mathbb{Z}_p} u^k\, du = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{i=0}^{p^n-1} i^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i+1} B_{k-i} (p^n)^{i+1} = B_k ,$$

où B_k désigne le k-ième nombre de Bernoulli.

(3) Pour $k \geqslant 0$,

$$\int^R_{\mathbb{Z}_p} \binom{u}{k}\, du = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{i=0}^{p^n-1} \binom{i}{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \binom{p^n}{k+1} = \frac{(-1)^k}{k+1} .$$

2.2. Quelques propriétés de l'intégrale.

(i) Si f est R-réglée sur $p^t \mathbb{Z}_p$, $f(p^t u)$ est R-réglée sur $\mathbb{Z}_p$ et

$$\frac{1}{p^t} \int^R_{\mathbb{Z}_p} f(p^t u)\, du = \int^R_{p^t \mathbb{Z}_p} f(u)\, du .$$

(ii) Soit f R-réglée sur $\mathbb{Z}_p$ et différentiable aux points $0 , 1 , \dots , m-1$ alors $f_0(X + j)$ est R-réglée pour $j = 1 , \dots , m$, et on a

$$\int^R_{\mathbb{Z}_p} f(u+m)\, du = \int^R_{\mathbb{Z}_p} f(u)\, du + \sum_{i=0}^{m-1} f'(i) .$$

(iii) Plus généralement, soit f R-réglée sur $\mathbb{Z}_p$ et différentiable aux entiers j, $\ell \leqslant j < m$, alors $f_0(X + j)$ est R-réglée pour $j = \ell , \dots , m$, et on a

$$\int_{\mathbb{Z}_p}^{R} f(u+m)\,du = \int_{\mathbb{Z}_p}^{R} f(u+\ell)\,du + \sum_{j=\ell}^{m-1} f'(j)\ .$$

(iv) On déduit de (iii) que, si f est R-réglée, dérivable et à dérivée nulle aux points entiers, l'intégrale est invariante par les translations entières.

On obtient par exemple en appliquant la propriété (iii) :

$$\text{pour } k \geq 2\ ,\quad \int_{\mathbb{Z}_p}^{R} (u+1)^k\,du = \int_{\mathbb{Z}_p}^{R} u^k\,du\ ,$$

et

$$\text{pour } k \geq 2 \text{ et } m \geq 1\ ,\quad \int_{\mathbb{Z}_p}^{R} (u+m)^k\,du = \int_{\mathbb{Z}_p}^{R} u^k\,du + k\sum_{i=1}^{m-1} i^{k-1}\ .$$

(v) Si f et $\mathcal{R}$-réglée sur K et si

$$\left|\int_K^{\mathcal{R}} f(u)\,du\right| \leq M \qquad (\text{resp.} = M\ ),$$

alors, pour n assez grand,

$$\left|\sum_{x\in \mathcal{R}_n \cap K} f(x) \leq p^{-n} M \quad (\text{resp.} = p^{-n} M\ ).$$

2.3. Critères d'intégrabilité. - Soit f continue sur K et telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $m = 0, \dots, p-1$ et $x \in R_n \cap K$,

$$|f(x+mp^n) - f(x)| \leq \varepsilon/p^n\ ,$$

alors f est R-réglée sur K.

Remarquons d'ailleurs que ce critère ne concerne que la restriction de f aux points de $\bigcup_n (R_n \cap K)$. Ceci est naturel, car la définition de l'intégrale ne concerne que cette restriction. Il serait, en toute rigueur, plus normal de définir l'intégrale d'une fonction définie sur $K \cap (\bigcup_n R_n)$, par exemple sur $\mathbb{N}$, si $K = \mathbb{Z}_p$. Cependant les applications portent en général sur des fonctions continues, et celles-ci sont déterminées par leur restriction à $K \cap (\bigcup_n R_n)$, il est alors plus simple de s'intéresser à des fonctions définies sur K.

On remarquera aussi que si une fonction satisfait au critère ci-dessus, elle est dérivable et à dérivée nulle aux points de $K \cap (\bigcup_n R_n)$, mais ces conditions ne sont pas équivalentes.

Un exemple de fonction de ce type est la classique fonction dérivable, à dérivée nulle, non localement constante, définie sur $\mathbb{Q}_p$ par

$$a = \sum_{h\geq h_0} a_h\, p^h\ ,\quad 0 \leq a_h < p\ ,\quad f(a) = \sum_{h\geq h_0} a_h\, p^{2h}\ .$$

On calcule aisément $\int_{\mathbb{Z}_p}^{R} f(u)\,du = -1/(2(p+1))$.

Ce critère n'est pas encore très satisfaisant puisque, par exemple, les polynômes non constants n'y satisfont pas et sont cependant R-réglées sur tout ouvert compact de $\mathbb{Q}_p$.

Désormais, toutes les notions de "R-réglé", et toutes les intégrales seront relatives au système canonique R (2.1, définition 1 bis), et nous omettrons le R .

On démontre les résultats suivants

THÉORÈME 1. - Soit f une fonction strictement analytique sur $p^t \mathbb{Z}_p$, et soit $f(X) = \sum_{n\geq 0} a_n p^{-nt} X^n$ sa série de Taylor à l'origine, alors

(i) f est réglée sur $p^t \mathbb{Z}_p$;

(ii) $\int_{p^t \mathbb{Z}_p} f(u)\, du = \sum_{n\geq 0} a_n p^{-(n+1)t} B_n$;

(iii) $\left|\int_{p^t \mathbb{Z}_p} f(u)\, du\right| \leq p^{1+t} \sup_n |a_n|$.

La démonstration repose sur les faits suivants : si f est un polynôme, l'égalité (ii) résulte des calculs faits précédemment, on en déduit l'inégalité (iii) pour les polynômes. On voit alors que l'intégrale sur $p^t \mathbb{Z}_p$ est une forme linéaire continue sur l'espace des polynômes muni de la norme

$$\sup_n |a_n| = \|f\| \quad \text{si} \quad f(X) = \sum a_n p^{-nt} X^n ,$$

or l'espace des fonctions analytiques strictes sur $p^t \mathbb{Z}_p$ est le complété de l'espace des polynômes pour cette norme, d'où le théorème.

THÉORÈME 2. - Soit f une fonction localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$ et

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \binom{x}{n} ,$$

sa série d'interpolation sur les entiers, alors

(i) f est réglée sur $\mathbb{Z}_p$;

(ii) $\int_{\mathbb{Z}_p} f(u)\, du = \sum_{n\geq 0} ((-1)^n a_n)/(n+1)$.

Preuve. - Il existe un entier h tel que la restriction de f à chaque disque de rayon p^{-h} y soit strictement analytique. Soit alors

$$f = \sum_{i=0}^{p^h-1} (\chi_{i+p^h \mathbb{Z}_p} f) = \sum_{i=0}^{p^h-1} f_i , \text{ où } f_i = \chi_{i+p^h \mathbb{Z}_p} f ,$$

alors, les sommes de Riemann

$$s_{n,i} = 1/p^n \sum_{j=0}^{p^n-1} f_i(j) = 1/p^n \sum_{x\in R_n \cap (i+p^n \mathbb{Z}_p)} f(x) ,$$

convergent vers $I_n = \int_{i+p^n \mathbb{Z}_p} f(u)\, du$ d'après le théorème 1, et de plus,

$$|I_i| \leq p^{1+h} \|f_i\| .$$

On en déduit que f est réglée, et que son intégrale satisfait à

$$\left|\int_{\mathbb{Z}_p} f(u)\, du\right| \leq \sup_i |I_i| \leq p^{1+h} \|f\|_h ,$$

où $\|f\|_h$ désigne la norme de f dans l'espace des fonctions analytiques d'ordre h sur $\mathbb{Z}_p$ (cf. par.exemple [1]). On en déduit que l'intégrale est une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions analytiques d'ordre h , or on sait [1] qu'il existe des constantes $\lambda_{n,h}$ telles que

$$\|f\|_h = \sup_n |a_n \lambda_{n,h}| \quad \text{et} \quad |a_n \lambda_{n,h}| \to 0 ,$$

d'où l'on déduit (ii).

On peut évidemment donner de nombreux exemples de calculs d'intégrales de fonctions localement analytiques, citons en particulier

$$\text{pour } p \neq 2 , \int_{\mathbb{Z}_p} \exp(pu\, du) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} p^{(n-1)} B_n = \frac{1}{\exp(p) - 1} ,$$

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \log(1 + u)\, du = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} p^k}{k} B^k ,$$

$$\text{pour } |a| < 1 , \int_{\mathbb{Z}_p} (1 + a)^u\, du = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} a^k = \frac{1}{a} \log(1 + a) .$$

2.4. Généralisation de cette intégrale. - Soit plus généralement G un groupe topologique séparé, muni d'une suite de sous-groupes $(U_n)_{n\in \mathbb{N}\cup\{0\}}$ tels que

- pour tout n , U_n est ouvert et para-compact ;
- G/u_0 est au plus dénombrable.

Un cas partuculier de cette situation est le groupe $\mathbb{Q}_p$, muni de la suite $U_n = p^n \mathbb{Z}_p$.

Notons $\mathcal{R}_n$ un système de représentants de G/U_n , soit $(x_{i,0})_{i\leq 0}$ une indexation de $\mathcal{R}_0$: nous poserons, pour $r < 0$,

$$U_r = \bigcup_{i=r}^{0} (x_{i0}\, U_0) .$$

On choisira alors, pour tout n , une indexation $(x_{in})_{i\leq 0}$ de $\mathcal{R}_n$ telle que

$$U_r = \bigcup_{i=r_n}^{0} x_{i,n}\, U_n , \text{ où } r_n = (r + 1)|U_0/U_n| - 1 .$$

En posant $\mu(U_n) = 1/(|U_0/U_n|)$, on définit exactement, comme dans le cas de $\mathbb{Q}_p$, l'intégrale d'une fonction en escalier, la notion de fonction $\mathcal{R}$-réglée, de fonction $\mathcal{R}$-intégrable, etc.

Un exemple important d'un tel système est le suivant : soit $m \geq 1$, prenons pour G le groupe additif de $\mathbb{Q}$ muni de la topologie discrète, et posons $U_0 = \mathbb{Z}$, $U_n = mp^n \mathbb{Z}$ pour $n \geq 1$.

En choisissant

$$R_{n,m} = \bigcup_{i=0}^{m-1} (R_n + ip^n) ,$$

où R_n désigne les représentants canoniques de $\mathbb{Q}_p/p^n \mathbb{Z}_p$, on obtient des représentants canoniques de $\mathbb{Q}^+/U_n$.

On remarquera alors que si f est par exemple une fonction définie sur $\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{mp^n}\sum_{x\in R_{n,m}\cap \mathbb{Z}} f(x) = \frac{1}{mp^n}\sum_{i=0}^{mp^n-1} f(i) = \frac{1}{m}\sum_{u=0}^{m-1}\left(\frac{1}{p^n}\sum_{i=0}^{p^n-1} f(u+m_i)\right).$$

Notons $\int^{(m)}$ l'intégrale associée aux sous-groupes $mp^n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Q}^+$ et aux représentants canoniques $R_{n,m}$. On déduit de la relation ci-dessus que

$$\int_{\mathbb{Z}}^{(m)} f(u)\,du = \frac{1}{m}\sum_{\ell=0}^{m-1}\int_{\mathbb{Z}_p} f(mu+\ell)\,du ,$$

cette égalité étant valable dès que le membre de droite existe.

Une application intéressante de cette intégrale est obtenue par exemple de la façon suivante : Soit χ est un caractère multiplicatif de $\mathbb{Z}$ de conducteur m_χ, et soit f une fonction localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$, alors on montre que

$$\int_{\mathbb{Z}}^{m_\chi} \chi(u)\,f(u)\,du = \sum_{\ell=0}^{m_\chi-1}\frac{\chi(\ell)}{m_\chi}\int_{\mathbb{Z}_p} f(m_\chi u+\ell)\,du .$$

3. Applications arithmétiques.

VOLKENBORN donne, en [8], un certain nombre d'applications à des fonctions arithmétiques, nous ne citerons que quelques résultats concernant les nombres de Bernoulli.

A un caractère multiplicatif χ de $\mathbb{Z}$, de conducteur m_χ, sont attachés les nombres de Bernoulli B_χ^k, définis par

$$\sum_{\mu=1}^{m_\chi}\chi(\mu)\,\frac{X\exp(\mu X)}{\exp(m_\chi X)-1} = \sum_{k\geq 0} B_\chi^k\,\frac{X^k}{k!} ,$$

les nombres de Bernoulli ordinaires étant attachés au caractère unité.

On démontre alors que

$$B_\chi^k = \int_{\mathbb{Z}}^{(m_\chi)} \chi(u)\,u^k\,du .$$

On en déduit par exemple

$$|B_\chi^k| \leq \frac{p}{|m_\chi|} .$$

$$B_\chi^k = \frac{1}{m_\chi}\sum_{\ell=0}^{m_\chi-1}\left(\chi(\ell)\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu} m_\chi^\nu\, B^\nu\,\ell^{k-\nu}\right).$$

On retrouve aussi des propriétés déjà démontrées par KUBOTA et LEOPOLDT [3]. Il ne me semble pas qu'on obtienne des propriétés nouvelles des nombres de Bernoulli, cependant le fait même de retrouver au moyen de l'intégrale de Volkenborn des propriétés arithmétiques non triviales des nombres de Bernoulli, me paraît montrer qu'à la différence des autres notions d'intégrales p-adique, peut-être plus séduisantes d'un point de vue théorique, l'intégrale de Volkenborn, d'apparence plus calculatoire, peut avoir un intérêt arithmétique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France., t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[2] BRUHAT (F.). - Intégration p-adique, Séminaire Bourbaki, 14e année, 1961/62, n° 229, 16 p.

[3] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie der Zetawerte, J. für die reine und angew. Math., t. 214/215, 1964, p. 328-339.

[4] MONNA (A. F.) and SPRINGER (T. A.). - Intégration non archimédienne, Indag. Math., t. 25, 1963, n° 4 ; Koninkl. nederl. Wetensch., Proc., Series A, t. 66, 1963, p. 634-653.

[5] ROOIJ (A. C. M. Van) and SCHIKHOF (W. H.). - Non archimedean integration theory, Indag. Math., t. 31, 1969, n° 2 ; Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series A, t. 72, 1969, p. 190-199.

[6] SCHIKHOF (W. H.). - Non archimedean harmonic analysis, Thesis Univ. Nijmegen, 1967.

[7] TOMAS (F.). - Integracion p-adica, Bol. Soc. mat. mexicana, t. 7, 1962, p. 1-38 (Tesis Doct. Mexico, 1961).

[8] VOLKENBORN (A.). - Eine p-adisches Integrale und seine Anwendungen, Dissertation Universität Köln, 1971.

(Texte reçu le 28 janvier 1972)

Yvette AMICE
E. N. S. J. F.
48 boulevard Jourdan
75014 PARIS