Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean-Marie Hasquenoph

# Localisation des zéros de polynômes réciproques

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 13, nº 2 (1971-1972), exp. nº G1, p. G1-G4

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A11_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° G1, 4 p.



8 novembre 1971

# LOCALISATION DES ZÉROS DE POLYNÔMES RÉCIPROQUES

par Jean-Marie HASQUENOPH

Le théorème de Rouché permet de déterminer la position, par rapport au cercle unité, des zéros de certains polynômes. En particulier, si $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ est un polynôme réciproque de degré $2n$ (c'est-à-dire tel que $P(X) = X^{2n} P(1/X)$), un théorème de Cohn ([2], [3]) montre que $P(X)$ admet à l'intérieur du cercle unité autant de zéros que le polynôme

$$P_1(X) = X^{2n-1} P'(1/X) .$$

On en déduit facilement, en écrivant $P$ sous la forme

$$P(X) = a_0 X^{2n} + a_1 X^{2n-1} + a_{n-1} X^{n+1} + 2a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 ,$$

les résultats suivants :

1° Si

(1) $$|a_{n-1}| > n \sum_i |a_i| , \quad 0 \leqslant i \leqslant n , \quad i \neq n-1 ,$$

$P(X)$ admet exactement deux racines conjuguées sur le cercle unité ; $n-1$ à l'intérieur et autant à l'extérieur.

2° Si

(2) $$|a_n| > \sum_i |a_i| , \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1 ,$$

$P(X)$ n'admet aucune racine sur le cercle unité.

La méthode de A. COHEN [1] permet d'obtenir des résultats en sens inverse. De façon précise, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 1. - Soit $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme réciproque irréductible de degré $2p \geqslant 4$, n'admettant que deux zéros conjugués sur le cercle unité. Alors $P$ admet un multiple de la forme :

$$Q(X) = b_0 X^{2n} + b_1 X^{2n-1} + \ldots + 2b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \ldots + b_0$$

à coefficients dans $\mathbb{Z}$, dont $p$ au plus sont non nuls et tels que :

(3) $$|b_{n-1}| > \sum_i |b_i| , \quad 0 \leqslant i \leqslant n , \quad i \neq n-1 .$$

En posant $Q_1(X) = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n$, on a donc

$$Q(X) = Q_1(X) + X^{2n} Q_1(1/X) ,$$

et le théorème de Rouché montre que $Q_1$ admet $n-1$ racines à l'intérieur du cercle unité, et une racine réelle à l'extérieur.

THÉORÈME 2. - Soit $P(X) \in \underset{\sim}{Q}[X]$ un polynôme réciproque irréductible de degré $2p \geq 4$ n'admettant aucune racine sur le cercle unité. Alors $P$ admet un multiple $Q(X) = b_0 X^{2n} + \dots + 2b_n X^n + \dots + b_0$ à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$, dont $p$ au plus sont non nuls, et tels que :

$$|b_n| > \sum_i |b_i| \ , \quad 0 \leq i \leq n-1 \ . \tag{4}$$

Il en résulte qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre algébrique $\tau$ de degré pair, dont le polynôme irréductible est réciproque, ne soit pas situé, ainsi que tous ses conjugués, sur le cercle unité, est qu'il soit racine d'un polynôme $Q$ dont les coefficients vérifient l'inégalité (4).

Par contre, le théorème 1 ne donne pas de condition nécessaire et suffisante, à cause de la constante $n$ dans (1).

Démonstration du théorème 1. - Désignons par

$\tau = \tau^{(1)}$ et $\bar{\tau} = 1/\tau$ les racines de module 1 de $P$,
$\tau^{(j)}$ et $1/\tau^{(j)}$, $j = 2, \dots, s$, les racines réelles,
$\left.\begin{matrix}\tau^{(j)} & \text{et} & 1/\tau^{(j)}, \\ \bar{\tau}^{(j)} & \text{et} & 1/\bar{\tau}^{(j)},\end{matrix}\right\}$ $j = s+1, \dots, s+t$, les racines complexes,

et posons $T = \tau + 1/\tau$ ; $K = \underset{\sim}{Q}(T)$ est de degré $p = s + 2t$.

Soit

$$\sigma : K \longrightarrow A = \underset{\sim}{R}^s \times \underset{\sim}{C}^t \ ,$$

défini par

$$x \longmapsto (\sigma_1(x) \ , \ \dots \ , (\sigma_s(x) \ , \ \sigma_{s+1}(x) \ , \ \dots \ , \ \sigma_{s+t}(x))$$

le plongement canonique de $K$, $\sigma_j(T) = T^{(j)} = \tau^{(j)} + 1/\tau^{(j)}$.

Pour tout $i \in \underset{\sim}{N}$, posons $T_i = (\tau^i + (1/\tau^i))$. Il est facile de voir que $T_0 = 2$, $T_1$, ..., $T_{p-1}$ forment une base de $K$ sur $\underset{\sim}{Q}$, et que

$$T_i \, T_j = T_{i+j} + T_{i-j} \ , \quad \text{pour tout } i \text{ et } j \in \underset{\sim}{N} \ . \tag{5}$$

Enfin $|T_i| < 2$ pour tout $i$ et $\lim_{i \to \infty} |T_i^{(j)}| = +\infty$ pour $j = 2, \dots, s+t$.

Soit $B$ l'ensemble des $x \in K$ qui s'écrivent sous la forme

$$x = \sum_i a_i \, T_i \ , \quad 0 \leq i \leq n \ , \text{ avec } a_i \in \underset{\sim}{Q} \ , \text{ et } \sum |a_i| \leq 1 \ , \quad n \in \underset{\sim}{N} \ .$$

$B$ est une partie convexe, équilibrée et absorbante de $K$ (considéré comme espace vectoriel sur $\underset{\sim}{Q}$), et la relation

$$\|x\| = \inf\{\lambda \in \underset{\sim}{Q}^+ \mid x \in \lambda B\}$$

définit une semi-norme sur $K$ ([4], [5] chap. IV), et (5) montre que

$$\|xx'\| \leq 2 \, \|x\| \, \|x'\| \ , \tag{6}$$

$A$ étant le complété de $K$ pour la topologie produit de $K$ sur $\underset{\sim}{Q}$, on peut prolonger cette semi-norme en une semi-norme d'algèbre sur $A$. L'ensemble des éléments de $A$ de semi-norme nulle est donc un idéal

$$A_J = \{y = (y_1, \ldots, y_{s+t}) \mid y_j = 0 \text{ pour tout } j \in J\}$$

de $A$, où $J$ désigne une partie finie de $\{1, 2, \ldots, s+t\}$. Pour déterminer $J$, on utilisera le résultat suivant :

LEMME. - Soient $U$ la boule unité d'une semi-norme sur $A = \underset{\sim}{R}^s \times \underset{\sim}{C}^t$, et $f : A \dashrightarrow \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$ une application $\underset{\sim}{R}$-linéaire.

Alors $f$ s'annule sur les éléments de semi-norme nulle si, et seulement si, $f(U)$ est bornée.

En remarquant que $U \cap \sigma(K)$ est l'adhérence de $\sigma(B)$ dans $\sigma(K)$, et en appliquant le lemme aux projections $A \dashrightarrow \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$, on obtient

$$j \in J \Longleftrightarrow \text{l'ensemble des } \sum a_i T_i^{(j)} \text{ avec } \sum |a_i| \leqslant 1$$

est borné, d'où $J = \{1\}$.

Il en résulte que la semi-norme d'un élément de $A$ ne dépend que de sa première composante, donc, pour tout $x \in K$,

$$\|x\| = C\,|\sigma_1(x)| \quad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

L'inégalité (6) montre que $C = \|1\| \geqslant 1/2$, et comme $1 = (1/2)\,T_0 \in (1/2)\,B$, on a $\|1\| \leqslant 1/2$, d'où $C = 1/2$.

En particulier, $\|T\| = 1/2|T| < 1$, donc il existe $\lambda \in Q^+$, $\lambda < 1$, tel que $T = \lambda \sum_i a_i T_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, où les $a_i$ sont dans $\underset{\sim}{Q}$ et vérifient $\sum |a_i| \leqslant 1$. Après réduction au même dénominateur, et multiplication par $\tau^n$, on obtient une équation algébrique dont $\tau$ est racine, et dont les coefficients satisfont l'inégalité cherchée.

La démonstration du théorème 2 se fait de la même façon, mais aucun des ensembles des $\sum a_i T_i^{(j)}$ n'étant borné, on a $\|y\| = 0$ pour tout $y \in A$. En particulier, $\|1\| = 0 < 1/2$ dans $K$, donc on a une relation du type

$$1 = \lambda \sum_i a_i T_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \text{ avec } a_i \in \underset{\sim}{Q}, \text{ et } \sum |a_i| \leqslant 1, \quad \lambda \in \underset{\sim}{Q}^+ \text{ et } \lambda < 1/2,$$

ce qui donne l'équation cherchée.

## BIBLIOGRAPHIE

1° Polynômes.

[1] CONES (A.). - Ordres faibles et localisation de zéros de polynômes, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 18, 11 p.

[2] DIEUDONNÉ (J.). - Théorie analytique des polynômes d'une variable (à coefficients quelconques). - Paris, Gauthier - Villars, 1938 (Mémorial des Sciences mathématiques, 93).

[3] MARDEN (M.). - The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable, - New York, American mathematical Society, 1949 (Mathematical Surveys, 3).

2° <u>Espaces vectoriels topologiques.</u>

[4] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. 1- . - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[5] GARSOUX (J.) - Espaces vectoriels topologiques et distributions. - Paris, Dunod, 1963 (Collection universitaire de Mathématiques, 13).

(Texte reçu le 13 décembre 1971)

Jean-Marie HASQUENOPH
7 rue des Sources
77400 LAGNY