

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

BERNARD DE MATHAN

Dualité, et transformation de Fourier p -adiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, n° 1 (1971-1972),
exp. n° 10, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_1_A9_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DUALITE, ET TRANSFORMATION DE FOURIER p-ADIQUES

par Bernard de MATHAN

Les résultats exposés ici ont été obtenus en collaboration avec Mohammed GUERRAOUI [Rabat].

1. Introduction. Notation.

Ce travail consiste en l'étude des groupes vérifiant un équivalent p-adique du théorème de Pontrjagin, étude menée parallèlement à celle de la transformation de Fourier p-adique.

Soit p un nombre premier, et soient $\hat{\Omega}_p$ le complété de la clôture algébrique de \mathbb{Q}_p , A_p l'anneau de valuation de $\hat{\Omega}_p$, m_p l'idéal maximal de A_p , et $U_p = A_p - m_p$, le groupe multiplicatif des éléments $x \in \hat{\Omega}_p$, tels que $|x|_p = 1$. On désigne par R_p le groupe des racines de l'unité, dans $\hat{\Omega}_p$, et $R_p(p^\infty)$ le groupe des racines de l'unité, d'ordre une puissance de p . La topologie induite sur R_p , par celle de $\hat{\Omega}_p$, est la topologie discrète.

Soit G un groupe topologique abélien, localement compact. Nous appelons dual p-adique de G , le groupe \hat{G} des caractères p-adiques de G (homomorphismes continus de G dans U_p). Le groupe \hat{G} est muni de la topologie de la convergence compacte. De même, $\hat{\hat{G}}$ est le dual p-adique de \hat{G} , cependant, si \hat{G} n'est pas localement compact (ce qui peut se produire), nous ne considérons pas de topologie sur $\hat{\hat{G}}$.

On désigne par \tilde{G} le sous-groupe de \hat{G} , formé des caractères à valeurs dans R_p , et muni de la topologie induite par celle de \hat{G} . Dans le cas où G est compact, \tilde{G} est le groupe de torsion de \hat{G} , car l'image de G par un caractère $\chi \in \tilde{G}$, est un sous-groupe compact de R_p , donc fini, puisque R_p est discret. Dans le cas où G est un groupe de torsion, on a évidemment $\hat{G} = \tilde{G}$. Enfin, nous désignons par G' le dual complexe de G .

Nous ne considérons que des groupes abéliens, et totalemt discontinus (en abrégé t. d.), car, pour une raison évidente de connexité, tout caractère p-adique d'un groupe G , vaut 1 sur la composante neutre de G . Il est clair que le dual p-adique d'un groupe abélien, localement compact, totalement discontinu, est un groupe abélien t. d. Nous nous intéressons surtout aux groupes compacts ou discrets.

2. Groupes p-réflexifs.

Soit G un groupe localement compact, t. d. Pour tout $x \in G$, l'application \hat{x} de \hat{G} dans U_p , définie par $\hat{x}(\chi) = \chi(x)$, pour tout $\chi \in \hat{G}$, est un caractère

de \hat{G} , et l'application $x \rightarrow \hat{x}$ est un homomorphisme de G dans \hat{G} .

DEFINITION 1. - Le groupe G est dit p -réflexif, si l'homomorphisme $x \mapsto \hat{x}$, de G dans \hat{G} , est surjectif.

L'homomorphisme $x \mapsto \hat{x}$ est toujours injectif. Ceci est vrai plus généralement pour un groupe abélien linéairement topologisé (c'est-à-dire, muni d'une structure de groupe topologique, pour laquelle 0 possède une base de voisinages formée de sous-groupes), séparé. En effet, par passage au quotient par un sous-groupe ouvert, on se ramène au cas d'un groupe discret, le résultat découle alors du fait que U_p est un groupe injectif.

Supposons G compact. Le groupe \tilde{G} est discret, et l'application $x \mapsto \tilde{x}$, de G dans $\hat{\tilde{G}}$ (où \tilde{x} est la restriction du caractère \hat{x} à \tilde{G}), est un isomorphisme, algébrique et topologique, de G sur $\hat{\tilde{G}}$ ([1], [4]). Cela se ramène à la dualité complexe, car \tilde{G} est isomorphe au dual complexe G' de G .

Pour qu'un groupe compact, t. d., soit p -réflexif, il faut et il suffit que $\hat{G} = \tilde{G}$ [1].

En effet, si $\hat{G} \neq \tilde{G}$, il existe un caractère p -adique non trivial du groupe quotient \hat{G}/\tilde{G} , autrement dit, il existe un caractère p -adique χ de \hat{G} , tel que $\chi \neq 1$, et que $\ker \chi \supset \tilde{G}$. Il ne peut alors exister d'élément $x \in G$ tel que $\chi = \hat{x}$, puisqu'on aurait alors $\tilde{x} = 1$, donc $x = 0$, contrairement à la condition $\chi \neq 1$.

Dans le cas où G est un groupe discret, pour que G soit p -réflexif, il faut et il suffit que son dual p -adique \hat{G} soit un groupe compact p -réflexif. Pour que le dual \hat{G} , d'un groupe discret G , soit compact, il faut et il suffit que G soit un groupe de torsion, et \hat{G} est alors isomorphe à G' [1].

Exemples. - Soit q un nombre premier. Un pro- q -groupe (abélien) est un groupe G , qui soit limite projective d'une famille de q -groupes (abéliens) finis. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que G soit compact, t. d., et que, pour tout $x \in G$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n x = 0$.

Tout pro- q -groupe, avec $q \neq p$, est p -réflexif. Tout groupe fini, tout groupe compact t. d., à groupe de torsion dense, est p -réflexif.

Par contre, \mathbb{Z}_p n'est pas p -réflexif, car $\hat{\mathbb{Z}}_p = 1 + \mathfrak{m}_p$ (le caractère défini par l'élément $0 \in 1 + \mathfrak{m}_p$, étant la fonction exponentielle $x \mapsto 0^x$). Ainsi $\hat{\mathbb{Z}}_p$ n'est pas un groupe de torsion. On a $\tilde{\mathbb{Z}}_p = R_p(p^\infty)$.

3. Transformation de Fourier p -adique.

Soit G un groupe compact t. d., et soit $\Gamma = \tilde{G}$. Soit $L^1(\Gamma)$ l'algèbre des applications f de Γ dans $\hat{\Omega}_p$, tendant vers 0 selon le filtre des compléments des parties finies de Γ , la structure multiplicative étant la convolution,

définie par

$$f * g(\gamma) = \sum_{\delta \in \Gamma} f(\delta) g(\gamma \delta^{-1}) .$$

(Il est immédiat de vérifier que cette formule définit bien une fonction $f * g \in L^1(\Gamma)$). Munie de la norme : $\|f\| = \sup_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|$, $L^1(\Gamma)$ est une algèbre de Banach. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, soit ε_γ la fonction caractéristique de la partie $\{\gamma\}$ de Γ . L'application $\gamma \rightarrow \varepsilon_\gamma$ est un homomorphisme injectif de Γ dans le monoïde multiplicatif de l'algèbre $L^1(\Gamma)$. L'ensemble des $(\varepsilon_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, est une base normale de l'espace de Banach sous-jacent à l'algèbre $L^1(\Gamma)$.

La transformation de Fourier p-adique est l'application \mathfrak{F}_G de $L^1(\Gamma)$ dans l'algèbre de Banach, $C_p(G)$, des fonctions continues sur G , à valeurs dans $\hat{\Omega}_p$ (munie de la norme de la convergence uniforme), qui fait correspondre à une fonction $f \in L^1(\Gamma)$, la fonction $\hat{f} \in C_p(G)$, définie par

$$\hat{f}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \gamma(x) , \text{ pour tout } x \in G .$$

L'application \mathfrak{F}_G est un homomorphisme (d'algèbre) continu. On a $\|\hat{f}\| \leq \|f\|$ pour tout $f \in L^1(\Gamma)$. L'image $A_p(G)$, de $L^1(\Gamma)$, par l'homomorphisme \mathfrak{F}_G , contient les fonctions localement constantes sur G , donc est une sous-algèbre dense de $C_p(G)$.

D'après SCHIKHOF [4], l'application qui fait correspondre à un élément $x \in G$, l'idéal m_x de $L^1(\Gamma)$, formé des fonctions f telles que $\hat{f}(x) = 0$, est une bijection de G sur le spectre maximal de l'algèbre $L^1(\Gamma)$. L'application $f \rightarrow \|\hat{f}\|$ apparaît alors comme la semi-norme spectrale de l'algèbre $L^1(\Gamma)$.

DÉFINITION 2. - Un groupe compact t. d. G est dit p-Fourier-injectif, si l'homomorphisme \mathfrak{F}_G est injectif.

Il revient au même de dire que l'intersection des idéaux maximaux de $L^1(\Gamma)$ est réduite à $\{0\}$ ou encore que la semi-norme spectrale de l'algèbre $L^1(\Gamma)$ est une norme.

Exemple. - Un groupe fini, un pro-q-groupe, avec $q \neq p$, un groupe possédant une mesure de Haar p-adique, sont p-Fourier-injectifs. Dans ces cas, \mathfrak{F}_G est un isomorphisme de $L^1(\Gamma)$ sur $C_p(G)$ (et d'ailleurs réciproquement, si \mathfrak{F}_G est un isomorphisme, le groupe G possède une mesure de Haar p-adique). Nous verrons d'autres exemples de groupes, sans mesure de Haar p-adique, qui soient p-Fourier-injectifs, par exemple, les groupes dont le groupe de torsion est dense.

Par contre, on ne sait pas si $\hat{\mathbb{Z}}_p$ est p-Fourier-injectif. En fait, nous ignorons s'il existe des groupes non p-Fourier-injectifs. Nous montrerons que ce problème est équivalent à celui de la p-Fourier-injectivité de $\hat{\mathbb{Z}}_p$.

4. Groupes p-réflexifs, et groupes p-Fourier-injectifs.

Nous allons démontrer les résultats suivants.

THÉOREME 1. - Tout groupe compact, t. d., G , possède un sous-groupe fermé p -réflexif, maximum, M , qui est le plus petit sous-groupe fermé de G tel que G/M soit un pro- p -groupe sans torsion, ou nul.

COROLLAIRE. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe compact t. d., G , soit p -réflexif, est qu'il n'existe pas de sous-groupe fermé H de G , différent de G , tel que G/H soit un pro- p -groupe sans torsion.

THÉOREME 2. - L'hypothèse que \tilde{Z}_p soit p -Fourier-injectif, implique que tout groupe compact t. d. le soit.

L'hypothèse que \tilde{Z}_p ne soit pas p -Fourier-injectif implique que, pour qu'un groupe compact t. d. soit p -Fourier-injectif, il faut et il suffit qu'il soit p -réflexif.

En tous cas, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE. - Tout groupe compact t. d., p -réflexif, est p -Fourier-injectif.

La démonstration de ces résultats découlera des propositions suivantes.

PROPOSITION 1. - Soit G un groupe compact, t. d. Si G est p -réflexif (resp. p -Fourier-injectif), tout groupe quotient G/H de G , par un sous-groupe fermé H , est p -réflexif (resp. p -Fourier-injectif).

Nous laissons la démonstration au lecteur.

Par contre, il est faux que tout sous-groupe fermé d'un groupe compact t. d. p -réflexif, soit p -réflexif. Ainsi, \tilde{Z}_p , qui est non p -réflexif, s'identifie à un sous-groupe fermé du groupe p -réflexif $\prod_{n \in \mathbb{N}}^* \tilde{Z}/p^n \tilde{Z}$. Cela provient du fait que les caractères p -adiques, lorsqu'ils ne sont pas d'ordre fini, ne sont pas toujours prolongeables.

PROPOSITION 2. - Soit G un groupe compact t. d. S'il existe un sous-groupe fermé H de G , tel que H et G/H soient p -réflexifs (resp. p -Fourier-injectifs), alors le groupe G est p -réflexif (resp. p -Fourier-injectif).

Preuve. - Supposons H et G/H p -réflexifs. Soit χ un caractère p -adique de G . Comme $\chi(H)$ est un sous-groupe fini du groupe R_p des racines de l'unité dans $\hat{\Omega}_p$, il existe un entier n tel que $\ker \chi^n \supset H$. Soit alors γ le caractère de G/H , défini par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G/H \\ \chi^n \searrow & & \swarrow \gamma \\ & U & \\ & p & \end{array}$$

Comme G/H est p -réflexif, γ est à valeurs dans les racines de l'unité, donc également χ^n , et χ . Ainsi, G est p -réflexif.

Supposons maintenant H et G/H , p -Fourier-injectifs. Soit $f \in L^1(\hat{G})$, telle que $\hat{f} = 0$. Par un argument de translation, il suffit de montrer que $f(1) = 0$.

Soit H^\perp le noyau de l'homomorphisme de \tilde{G} dans \tilde{H} , qui fait correspondre à tout caractère $\gamma \in \tilde{G}$, sa restriction γ_H à H (homomorphisme d'ailleurs surjectif, en raison de l'isomorphisme avec la dualité complexe).

On a, pour tout $x \in H$:

$$\sum_{\chi \in \tilde{H}} \left(\sum_{\gamma \in \tilde{G}, \gamma_H = \chi} f(\gamma) \right) \chi(x) = 1,$$

donc, puisque H est p -Fourier-injectif :

$$\sum_{\gamma \in H^\perp} f(\gamma) = 0.$$

Soit $t \in G$, et soit $f_t \in L^1(\tilde{G})$, la fonction définie par $f_t(\gamma) = f(\gamma) \gamma(t)$. La transformée de Fourier de f_t est la translatée : $\hat{f}_t(x) = \hat{f}(x + t)$, donc $\hat{f}_t = 0$. Le raisonnement précédent montre donc que :

$$\sum_{\gamma \in H^\perp} f(\gamma) \gamma(t) = 0 \text{ pour tout } t \in G.$$

En identifiant H^\perp au dual de G/H , on a alors :

$$\sum_{\gamma \in H^\perp} f(\gamma) \gamma(\xi) = 0 \text{ pour tout } \xi \in G/H,$$

donc $f(1) = 0$, puisque G/H est p -Fourier-injectif.

COROLLAIRE. - Le produit d'une famille finie de groupes compacts t. d. p -réflexifs (resp. p -Fourier-injectifs), est p -réflexif (resp. p -Fourier-injectif).

PROPOSITION 3. - Soient $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes fermés d'un groupe compact t. d., G , et soit H le sous-groupe fermé de G engendré par $\bigcup_{i \in I} H_i$. Si chacun des H_i est p -réflexif (resp. p -Fourier-injectif), alors H est p -réflexif (resp. p -Fourier-injectif).

Preuve. - Pour " p -réflexif", la démonstration est évidente.

Supposons donc chacun des H_i , p -Fourier-injectif. La proposition 1, et le corollaire de la proposition 2, démontrent immédiatement le résultat lorsque l'ensemble I est fini, puisqu'alors H est isomorphe à un quotient du produit $\prod_{i \in I} H_i$.

Dans le cas général, quitte à remplacer la famille $(H_i)_{i \in I}$, par la famille (K_J) , où J décrit l'ensemble des parties finies de I , et où K_J est le sous-groupe fermé de G engendré par $\bigcup_{i \in J} H_i$, on peut donc supposer la famille $(H_i)_{i \in I}$ filtrante supérieurement. Supposons, de plus, $G = H$.

Soit $f \in L^1(\tilde{G})$, telle que $\hat{f} = 0$. Comme dans la proposition 2, on a :

$$\sum_{\gamma \in H_i^\perp} f(\gamma) = 0 \text{ pour tout } i.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une partie finie S de I , telle que l'on ait

$$|f(\gamma)|_p \leq \varepsilon,$$

pour tout $\gamma \notin S$. Or, comme $\bigcap_{i \in I} H_i^\perp = \{1\}$, il existe, pour tout $\chi \in S$, $\chi \neq 1$, un indice $i_\chi \in I$ tel que $\chi \notin H_{i_\chi}^\perp$. La famille des $(H_i^\perp)_{i \in I}$ étant filtrante infé-

rieurement, il existe donc un indice $i \in I$ tel que

$$(H_i^1 - \{1\}) \cap S = \emptyset .$$

Alors, comme

$$f(1) = - \sum_{\gamma \in H_i^1 - \{1\}} f(\gamma) ,$$

et que l'on a, pour tout $\gamma \in H_i^1 - \{1\}$, $|f(\gamma)|_p \leq \varepsilon$, on a donc $|f(1)|_p \leq \varepsilon$.

Ainsi $f(1) = 0$, ce qui démontre le résultat.

COROLLAIRE. - Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes compacts t. d., et soit $G = \prod_{i \in I} G_i$. Pour que G soit p -réflexif (resp. p -Fourier-injectif), il faut et il suffit que chacun des G_i soit p -réflexif (resp. p -Fourier-injectif).

Tout groupe G , compact t. d. (c'est-à-dire profini), est produit de pro- q -groupes (q décrivant l'ensemble des nombres premiers) : soit G_q l'ensemble des éléments $x \in G$ tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n x = 0$, G_q est un sous-groupe fermé de G , et est un pro- q -groupe. Le groupe G s'identifie au produit $\prod_q G_q$ (q décrivant l'ensemble des nombres premiers). Le groupe G_q sera dit pro- q -composante de G .

Comme tout pro- q -groupe, avec $q \neq p$, est p -réflexif et p -Fourier-injectif, le corollaire de la proposition 3 montre qu'un groupe compact t. d., G , est p -réflexif (resp. p -Fourier-injectif) si, et seulement si, sa pro- p -composante est p -réflexive, (resp. p -Fourier-injective). On est donc ramené à démontrer les théorèmes 1 et 2 pour un pro- p -groupe. Le lemme suivant est encore nécessaire.

LEMME 1. - Soit G un pro- p -groupe sans torsion. Il existe un sous-groupe fermé L de G tel que $G/L \simeq \mathbb{Z}_p$.

Preuve. - Par dualité (complexe), cela revient à démontrer que le dual complexe G' de G possède un sous-groupe isomorphe au dual de \mathbb{Z}_p , c'est-à-dire au groupe $R(p^\infty)$ des racines de l'unité d'ordre une puissance de p .

Or G' est un p -groupe de torsion, tel que $G'^p = G'$ (la notation G'^p désignant l'ensemble des éléments χ^p , lorsque χ décrit G'). En effet, $(G'^p)^\perp$ est l'ensemble des éléments $x \in G$ tels que $px = 0$, donc $(G'^p)^\perp = \{0\}$, puisque G est sans torsion. Il existe alors une suite $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de G' , telle que $\chi_1^p = 1$, et $\chi_1 \neq 1$, et que $\chi_{n+1}^p = \chi_n$ pour tout $n > 0$. Le sous-groupe de G' engendré les $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est isomorphe à $R(p^\infty)$.

COROLLAIRE. - Un pro- p -groupe sans torsion n'est pas p -réflexif. Sous l'hypothèse que \mathbb{Z}_p ne soit pas p -Fourier-injectif, un pro- p -groupe sans torsion n'est pas p -Fourier-injectif.

Nous pouvons maintenant démontrer les théorèmes 1 et 2. Soit G un pro- p -groupe, et soit H le plus petit sous-groupe fermé de G tel que G/H soit nul ou sans torsion. D'après la proposition 3, le groupe G possède un sous-groupe fermé p -réflexif, maximum, M . Montrons que $M = H$.

Tout d'abord, le groupe G/H est sans torsion. En effet, soit K un sous-groupe fini de G/M . L'image réciproque $m^{-1}(K)$ de K par la surjection canonique $m : G \rightarrow G/M$, est un sous-groupe fermé de G , contenant M , et qui est p -réflexif, puisque $m^{-1}(K)/M \simeq K$, et que M et K sont p -réflexifs. Donc $m^{-1}(K) = M$, et $K = \{0\}$. Ainsi est prouvée l'inclusion $M \supset H$.

On ne peut avoir $M \neq H$, car sinon le groupe M/H serait sans torsion, et p -réflexif (Proposition 1), contrairement au corollaire du lemme 1.

La même démonstration montre que, sous l'hypothèse que \mathbb{Z}_p ne soit pas p -Fourier-injectif, H est aussi le plus grand sous-groupe fermé p -Fourier-injectif de G .

Par contre, si \mathbb{Z}_p est p -Fourier-injectif, tout pro- p -groupe G (et donc tout groupe compact t. d.) est p -Fourier-injectif. En effet, G est engendré par la réunion de ses sous-groupes monothétiques (sous-groupes fermés engendrés par un élément,; et un tel sous-groupe, isomorphe, soit à un quotient $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$, soit à \mathbb{Z}_p , est alors p -Fourier-injectif.

5. Remarque.

Soit G un pro- p -groupe, et soit \bar{T} l'adhérence du groupe de torsion T de G . Le groupe \bar{T} est toujours p -réflexif et p -Fourier-injectif. Dans sa thèse de troisième cycle [1], Mohammed GUERRAOUI posait la question de savoir si le sous-groupe fermé p -réflexif maximum M , de G , est égal à \bar{T} . Il n'en est rien. On a $M \supset \bar{T}$, mais le groupe G/\bar{T} peut encore présenter de la torsion. Par exemple, soit G le sous-groupe fermé du groupe $A = \prod_{n \in \mathbb{N}}^* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$, formé des éléments $x \in A$ tels que $\prod_n (\text{pr}_n(x)) = \text{pr}_1(x)$ pour tout n , où \prod_n désigne la surjection canonique $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p \mathbb{Z}$, et pr_n la projection $A \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$. L'adhérence \bar{T} du groupe de torsion de G est formée des éléments $x \in G$ tels que $\text{pr}_1(x) = 0$. Or $G/\bar{T} \approx \mathbb{Z}/p \mathbb{Z}$. Ainsi, le groupe G est donc p -réflexif, puisque \bar{T} et $\mathbb{Z}/p \mathbb{Z}$ le sont.

6. Conjecture.

Il va sans dire que les auteurs conjecturent que \mathbb{Z}_p ne serait pas p -Fourier-injectif.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GUERRAOUI (Mohammed). - Sur la dualité p -adique entre groupes compacts et groupes discrets, Thèse 3e cycle, Math, Bordeaux 1971.
- [2] GUERRAOUI (Mohammed). - Sur la dualité p -adique, C. R. Acad. Sc. Paris (A paraître).
- [3] MONNA (A. F.) and SPRINGER (T. A.). - Intégration non archimédienne, Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series A, t. 66, 1963, p. 634-642 et 643-653.

