Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Eugène Dubois

Algorithme de Jacobi-Perron dans un corps de séries formelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, nº 1 (1971-1972), exp. nº 8, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_1_A7_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU (Théorie des nombres) 13e année, 1971/72, n° 8, 11 p.

13 décembre 1971

ALGORITHME DE JACOBI-PERRON DANS UN CORPS DE SÉRIES FORMELLES

par Eugène DUBOIS

Introduction. - PERRON [8] a introcuit, en 1907, une généralisation du développement en fraction continue, permettant de développer un système de n nombres réels.

BERNSTEIN ([2] et [3]) depuis 1963 s'est attaché à trouver des systèmes de nombres dont le développement par cet algorithme (A. J. P.) est périodique. Il a mis en évidence quelques classes de nombres, mais le problème de la caractérisation de ces systèmes semble difficile.

Nous avons construit cet algorithme dans un corps de séries formelles. Les résultats obtenus sont plus forts que dans le cas réel, mais nous n'avons pu caractériser les systèmes de nombres dont le développement est périodique. Dans le cas réel, nous avons obtenu une classe de nombres dont le développement est périodique et qui englobe la plupart des classes obtenues par BERNSTEIN.

1. Construction de l'algorithme.

Soient $K = F_q$ un corps fini à q éléments, $\mathfrak{L} = K(t)$ l'anneau des polynômes, $\mathfrak{F} = K(t)$ le corps des fractions de $\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{F}$ est muni de la valeur absolue 0-adique normalisée par $|f| = q^{-\deg f}$ si $\deg f$ désigne le degré du polynôme f .

Le complété $\mathfrak{F}_0$ de $\mathfrak{F}$ pour cette valeur absolue est le corps des séries de Laurent $\mathfrak{F}\{t^{-1}\}$.

Nous utiliserons l'isomorphisme (décomposition d'Artin) $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{P}$, où $\mathfrak{P} = t^{-1} K((t^{-1}))$ est l'idéal de valuation de $\mathfrak{F}_0$.

A partir d'un système de n nombres $(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_n^{(0)})$ de $\mathfrak{F}_0$, les formules

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_1^{(\nu)} = a_1^{(\nu)} + \dfrac{1}{\alpha_n^{(\nu+1)}} ; \quad a_1^{(\nu)} \in \mathfrak{L} , \quad |\alpha_n^{(\nu+1)}| > 1 , \\ \alpha_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)} + \dfrac{\nu_{i-1}^{(\nu+1)}}{\alpha_n^{(\nu+1)}} , \quad a_i^{(\nu)} \in \mathfrak{L} , \quad |\alpha_n^{(\nu+1)}| > |\alpha_{i-1}^{(\nu+1)}| \quad (i = 2, \ldots, n) , \end{cases}$$

déterminent par récurrence une suite de lignes de n nombres de $\mathfrak{F}_0$

$$(\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_n^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}} ,$$

et une suite de ligne de n polynômes

$$(a_1^{(\nu)}, \dots, a_n^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N}} .$$

Ceci est possible de manière unique si $\alpha_1^{(\nu)} \notin \mathcal{L}$ pour tout ν.

Dans le cas contraire, l'algorithme se continue avec moins de n nombres par des formules un peu modifiées.

On dit que l'algorithme appliqué au système $(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)})$ admet des interruptions.

Le tableau de polynômes $(a_i^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq n$, est dit le développement par l'A. J. P. du système $(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)})$.

On définit $(n + 1)$ suites de polynômes par

$$(2)\quad \begin{cases} A_i^{(j)} = 0 \quad (\text{si } i \neq j) \quad \text{et} \quad A_i^{(i)} = 1 \quad (i, j = 0, 1, \dots, n) \\ A_i^{(\nu+n+1)} = A_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \dots + a_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)} \\ \qquad\qquad (i = 0, 1, \dots, n ; \quad \nu \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Ces polynômes vérifient

$$(3)\qquad \alpha_i^{(0)} = \frac{A_i^{(\nu)} + \alpha_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \dots + \alpha_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu)} + \alpha_1^{(\nu)} A_0^{(\nu+1)} + \dots + \alpha_n^{(\nu)} A_0^{(\nu+n)}} \qquad (i = 1, \dots, n),$$

$$(4)\qquad \det(A_i^{(\nu+j)})_{i,j=0,1,\dots,n} = (-1)^{n\nu} \qquad \nu \in \mathbb{N},$$

$$(5)\qquad \alpha_n^{(\nu)} = \frac{A_0^{(\nu)} + \alpha_1^{(\nu)} A_0^{(\nu+1)} + \dots + \alpha_n^{(\nu)} A_0^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu-1)} + \alpha_1^{(\nu-1)} A_0^{(\nu)} + \dots + \alpha_n^{(\nu-1)} A_0^{(\nu+n-1)}} \qquad \nu \in \mathbb{N}^* .$$

Les formules (3) et (4) se démontrent facilement par récurrence en utilisant (1) et (2).

Pour obtenir (5), il suffit d'utiliser (1), puis (2), au dénominateur.

En appliquant (5) pour $1, 2, \dots, \nu$, on obtient

$$(6)\qquad \alpha_n^{(1)} \alpha_n^{(2)} \dots \alpha_n^{(\nu)} = A_0^{(\nu)} + \alpha_1^{(\nu)} A_0^{(\nu+1)} + \dots + \alpha_n^{(\nu)} A_0^{(\nu+n)} .$$

Identifions le développement à une suite de n-uples

$$\nu \to (a_1^{(\nu)}, \dots, a_n^{(\nu)}) .$$

En l'étudiant à partir d'un certain rang λ, on obtient une nouvelle suite

$$\nu \to (a_1^{(\nu+\lambda)}, \dots, a_n^{(\nu+\lambda)}) ,$$

à partir de laquelle on peut construire, par (2), des polynômes "$A_i^{(\nu)}$" que nous noterons $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ $(i = 0, 1, \dots, n ; \ \nu \in \mathbb{N})$.

On obtient alors par récurrence :

$$(7)\qquad A_i^{(\lambda+\nu)} = A_{0,\lambda}^{(\nu)} A_i^{(\lambda)} + A_{1,\lambda}^{(\nu)} A_i^{(\lambda+1)} + \dots + A_{n,\lambda}^{(\nu)} A_i^{(\lambda+n)} .$$

En effet, (7) est évident pour $\nu = 0, 1, \dots, n$.

Supposons (7) vraie pour tout ν', $\nu' \leq \nu + n$.

Il suffit alors de calculer

$$A_i^{(\lambda+\nu+n+1)} = A_i^{(\lambda+\nu)} + a_i^{(\lambda+\nu)} A_i^{(\lambda+\nu+1)} + \dots + a_n^{(\lambda+\nu)} A_i^{(\lambda+\nu+n)},$$

en appliquant (7) au rang $\nu, \nu+1, \dots, \nu+n$, puis (2).

D'après (1), nous avons $|a_n^{(\nu)}| > |a_i^{(\nu)}|$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$, et $\nu \in \underset{\sim}{N}^*$.

Ceci nous permet de calculer :

$$(8) \quad \begin{cases} |A_0^{(\nu+n+1)}| = \prod_{j=1}^{\nu} |a_n^{(j)}| \\ |A_0^{(\nu+n+1)}| = |a_i^{(0)}|\,|A_0^{(\nu+n+1)}| \quad (\text{si } a_i^{(0)} \neq 0). \end{cases}$$

THÉORÈME 1. – <u>Soit</u> $(a_i^{(\nu)})_{\nu\in \underset{\sim}{N}, 0\leq i\leq n}$, <u>un tableau de polynômes vérifiant</u>

$$|a_n^{(\nu)}| > \max_{1\leq i\leq n-1} (1, |a_i^{(\nu)}|) \quad (\nu \in \underset{\sim}{N}^*).$$

<u>Construisons les polynômes</u> $A_i^{(\nu)}$ <u>par</u> (2). <u>Alors</u>

(i) $\lim_{\nu\to\infty} \dfrac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ <u>existe dans</u> $\mathfrak{F}_0$ <u>pour</u> $i = 1, 2, \dots, n$,

(ii) <u>Le tableau considéré est le développement par l'</u>A. J. P. <u>du système</u> $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ <u>où</u> $\alpha_i = \lim_{\nu\to\infty} A_i^{(\nu)}/A_0^{(\nu)}$.

Posons

$$x_\nu = \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} - \frac{A_i^{(\nu-1)}}{A_0^{(\nu-1)}};$$

$$\lambda_0^{(\nu)} = \frac{A_0^{(\nu)}}{A_0^{(\nu+n+1)}}, \quad \lambda_j^{(\nu)} = \frac{A_0^{(\nu+j)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Alors $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j^{(\nu)} = 1$ (d'après (2)) et, pour $j = 0, 1, \dots, n-1$, $|\lambda_j^{(\nu)}| < 1$ (d'après (8)) et

$$x_{\nu+n+1} = - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j^{(\nu)} \sum_{t=j+1}^{n} x_{\nu+t} \quad \text{d'après (2).}$$

Ceci montre que $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = 0$, $\dfrac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ est une suite de Cauchy, elle converge donc dans $\mathfrak{F}_0$.

Pour démontrer la seconde partie, on construit, pour $\nu \in \underset{\sim}{N}$,

$$\alpha_i^{(\nu)} = \lim_{t\to\infty} \frac{A_{i,\nu}^{(t)}}{A_{0,\nu}^{(t)}}.$$

En étudiant la suite à partir du rang ν et $\nu+1$, la formule (7) permet d'obtenir :

$$A_{n,\nu+1}^{(t)} = A_0^{(t+1)} \quad \text{et} \quad A_{i,\nu+1}^{(t)} = A_{i+1}^{(t+1)} - a_{i+1}^{(\nu)} A_{0,\nu}^{(t+1)} \qquad (i = 0 , \dots n-1) ;$$

on en déduit que les $\alpha_i^{(\nu)}$ construits vérifient les formules (1) avec les $a_i^{(\nu)}$ donnés.

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> $(a_i^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N},0\leq i\leq n}$, <u>le développement de</u> $(\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n)$. <u>Alors</u> :

$$\lim_{\nu\to\infty} A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)}) = 0 \qquad (i = 1 , 2 , \dots , n) .$$

En posant $H_\nu = A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)}$, la relation (3) permet d'obtenir

$$H_{\nu+n} = -(\frac{1}{\alpha_n^{(\nu)}} H_\nu + \frac{\alpha_1^{(\nu)}}{\alpha_n^{(\nu)}} H_{\nu+1} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}^{(\nu)}}{\alpha_n^{(\nu)}} H_{\nu+n-1}) ,$$

alors $|\alpha_n^{(\nu)}| > 1$ et $|\alpha_n^{(\nu)}| > |\alpha_i^{(\nu)}|$ pour $i = 1,2,\dots,n-1$ permet de conclure.

Ce résultat, plus fort que dans le cas réel, nous a permis de caractériser les systèmes de nombres dont le développement par l'A. J. P. admet des interruptions.

Pour cela, il faut étudier les modifications des formules (1) à (4), et (7) et (8). Les théorèmes 1 et 2 se généralisent et on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - <u>Le développement de</u> $(\alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ <u>admet</u> m $(1 \leq m \leq n-1)$ <u>interruptions si, et seulement si, il existe</u> m <u>relations linéaires, indépendantes à coefficients dans</u> $\mathcal{L}$ <u>entre</u> $1 , \alpha_1 , \dots , \alpha_n$.

Pour la démonstration se reporter à [4].

2. Développements périodiques.

Soient $\alpha_1^{(0)} , \alpha_2^{(0)} , \dots , \alpha_n^{(0)}$ admettant, par l'A. J. P. , un développement périodique (nous le supposerons purement périodique de longueur k).

On introduit un polynôme caractéristique, f, du développement vérifiant les propriétés suivantes.

Le nombre $\rho_0 = \alpha_n^{(0)} \quad \alpha_n^{(1)} \quad \dots \quad \alpha_n^{(k-1)}$ est racine de

$$f(\rho) = \det \begin{bmatrix} \rho - A_0^{(k)} , - A_0^{(k+1)} , \dots , - A_0^{(k+n)} \\ \dots \\ - A_n^{(k)} , - A_n^{(k+1)} , \dots , \rho - A_n^{(k+n)} \end{bmatrix}$$

D'après la périodicité et (6), $\rho_0 = A_0^{(k)} + \alpha_1 A_0^{(k+1)} + \dots + \alpha_n A_0^{(k+n)}$, et en utilisant (3),

(9) $$\rho_0 \alpha_i = A_i^{(k)} + \alpha_1 A_i^{(k+1)} + \dots + \alpha_n A_i^{(k+n)} \qquad (1 \leq i \leq n) ,$$

$(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est donc vecteur propre associé à ρ_0 de la matrice $(A_i^{(k+j)})$, $0 \leq i, j \leq n$.

D'autre part, en considérant la matrice adjointe :

$$\begin{bmatrix} g_{0,0}(\rho), \dots, g_{0,n}(\rho) \\ \dots \\ g_{n,0}(\rho), \dots, g_{n,n}(\rho) \end{bmatrix}$$

on a, pour $\lambda = 0, 1, \dots, n$ et $i = 0, 1, \dots, n$,

(10) $\rho g_{\lambda,i}(\rho) = A_i^{(k)} g_{\lambda,0}(\rho) + A_i^{(k+1)} g_{\lambda,1}(\rho) + \dots + A_i^{(k+n)} g_{\lambda,n}(\rho) + A_i^{(-\lambda)} f(\rho)$.

Alors $(g_{\lambda,0}(\rho_0), \dots, g_{\lambda,n}(\rho_0))$ est un vecteur-propre associé à ρ_0 (s'il est non nul).

THÉORÈME 4. - Si le développement de $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est périodique, on a

(i) α_i est algébrique sur $\mathfrak{F}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$,

(ii) Le polynôme caractéristique du développement est irréductible sur $\mathfrak{F}$ et admet un P. V. élément [1] unité, ρ_0, pour racine,

(iii) $\mathfrak{F}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \mathfrak{F}(\rho_0)$.

Nous supposons le développement purement périodique.

Nous utiliserons un théorème dû à Marthe GRANDET [6].

THÉORÈME 5. - Pour qu'un élément $\alpha \in \mathfrak{F}_0$ soit algébrique sur $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit qu'il admette des approximations rationnelles régulièrement réparties, c'est-à-dire $\exists\, v_m, u_m \in \mathfrak{L}$, $\exists\, \omega \in \mathfrak{F}_0$, $|\omega| > 1$ tels que

$$\lim_{m\to\infty}(u_m - \alpha v_m) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{m\to\infty}(v_{m+1} - \omega v_m) = 0 .$$

De plus, ω est un P. V. élément et $\alpha \in \mathfrak{F}(\omega)$.

Nous allons montrer que, pour $\lambda = 0, 1, \dots, k-1$;

$$\left(\frac{A_1^{(k+\lambda)}}{A_0^{(\nu k+\lambda)}}, \dots, \frac{A_n^{(\nu k+\lambda)}}{A_0^{(k+\lambda)}} \right)_{\nu \in \underset{\sim}{N}}$$

sont des approximations rationnelles, simultanées, régulièrement réparties de $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

D'après le théorème 2, il suffit de montrer $\lim_{\nu\to\infty}(A_0^{(\nu k+\lambda)} - \rho_0 A_0^{(\nu k+\lambda)}) = 0$.

En utilisant les relations (9) et (7), on a

$$A_0^{((\nu+1)k+\lambda)} - \rho_0 A_0^{(\nu k+\lambda)} = \sum_{s=0}^{n} A_s^{(\nu k+\lambda)} A_0^{(k+s)} - (\sum_{s=0}^{n} A_0^{(k+s)} \alpha_s) A_0^{(\nu k+\lambda)}$$

$$= \sum_{s=0}^{n} A_0^{(k+s)} (A_s^{(\nu k+\lambda)} - \alpha_s A_0^{(\nu k+\lambda)}) ,$$

et le théorème 2 montre que cette expression tend vers 0 quand $v \to \infty$.

Alors $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n$ sont algébriques sur $\mathfrak{F}$, et

$$\mathfrak{F}(\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n) \subset \mathfrak{F}(\rho_0) ,$$

et ρ_0 est un P. V. élément.

Mais ρ_0 est de degré inférieur ou égal à $n + 1$, et $(1 , \alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ sont linéairement indépendantes (théorème 3).

Alors $\mathfrak{F}(\alpha_1 , \dots , \alpha_n) = \mathfrak{F}(\rho_0)$, et f est irréductible sur $\mathfrak{F}$.

Enfin ρ_0 est une unité, car le coefficient constant de f vaut ± 1 d'après (4).

THÉORÈME 6. - Soient $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n$, n nombres de $\mathfrak{F}_0$ admettant un développement par l'A. J. P. purement périodique de longueur k .

Soit ρ_1 , une racine du polynôme caractéristique de plus grande valeur absolue après ρ_0 .

Alors la loi d'approximation s'écrit :

$$|A_i^{(\nu k+\lambda)} - \alpha_i A_0^{(\nu k+\lambda)}| < C|\rho_1|^\nu \qquad \begin{matrix}(i = 1 , 2 , \dots , n)\\(\lambda = 0 , \dots , k - 1)\end{matrix}$$

où C est une constante dépendant de $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n$.

Par contre, pour $\lambda = 0 , 1 , \dots , k - 1$, il existe au moins un $i \in \{1,\dots,n\}$ et une constante C' tels que, pour une infinité de ν , on ait :

$$|A_{i_0}^{(\nu k+\lambda)} - \alpha_i A_0^{(\nu k+\lambda)}| > C'|\rho_i^\nu| .$$

LEMME.

$$\frac{g_{\lambda,i}(\rho)}{f(\rho)} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{\rho^{\nu+1}} , \quad |\rho| > |\rho_0| .$$

En effet, d'après (10),

$$\frac{g_{\lambda,i}(\rho)}{f(\rho)} = \frac{A_i^{(\lambda)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{A_i^{(k)} g_{\lambda,0}(\rho) + \dots + A_i^{(k+n)} g_{\lambda,n}(\rho)}{f(\rho)} .$$

En recommençant l'opération pour $g_{\lambda,0}(\rho)/(f(\rho))$, ... , $g_{\lambda,n}(\rho)/(f(\rho))$, on obtient

$$\frac{g_{\lambda,i}(\rho)}{f(\rho)} = \frac{A_i^{(\lambda)}}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}(A_i^{(k)} A_0^{(\lambda)} + \dots + A_i^{(k+\lambda)} A_n^{(\lambda)}) + \frac{1}{\rho^2 f(\rho)} \sum_{s=0}^{n} A_i^{(2k+s)} g_{\lambda,s}(\rho) ,$$

d'après la périodicité et (7) ; $A_i^{(k)} A_0^{(\lambda)} + \dots + A_i^{(k+\lambda)} A_n^{(\lambda)} = A_i^{(k+\lambda)}$.

Après ν étapes, on obtient :

$$\frac{g_{\lambda,i}(\rho)}{f(\rho)} = \frac{A_i^{(\lambda)}}{\rho} + \frac{A_i^{(k+\lambda)}}{\rho} + \dots + \frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{\rho^{\nu+1}} + \frac{1}{\rho^{(\nu+1)} f(\rho)} \sum_{s=0}^{n} A_i^{((\nu+1)k+s)}\ g_{\lambda,s}(\rho) \ .$$

Il suffit alors de montrer que le reste de la série tend vers 0 pour ρ assez grand et que le rayon de convergence de la série est $|\frac{1}{\rho_0}|$, ceci résulte de

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{A_i^{((\nu+1)k+\lambda)}}{A_i^{(\nu k+\lambda)}} = \rho_0 \ .$$

Preuve du théorème 6. - Nous allons montrer que $A_i^{(\nu k+\lambda)} = \sum_{t=0}^{n} \gamma_{t,i}\ \rho_t^{\nu}$, où $\gamma_{t,i}$ sont des constantes. f étant irréductible sur $\mathfrak{F}$ ses racines sont simples. On a, pour $|\rho| > |\rho_0|$,

$$\frac{g_{\lambda,i}(\rho)}{f(\rho)} = \sum_{t=0}^{n} \frac{\gamma_{t,i}}{\rho - \rho_t} = \sum_{t=0}^{n} \sum_{\nu>0} \frac{\gamma_{t,i}}{\rho} \times \left(\frac{\rho_t}{\rho}\right)^{\nu} = \sum_{\nu>0} \frac{1}{\rho^{\nu+1}} \sum_{t=0}^{n} \gamma_{t,i}\ \rho_t^{\nu} \ .$$

En utilisant le lemme et l'unicité du développement en série entière, on obtient l'égalité cherchée avec $\gamma_{t,i} = g_{\lambda,i}(\rho_t)/f'(\rho_t)$.

Alors

$$A_i^{(\nu k+\lambda)} - \alpha_i\ A_0^{(\nu k+\lambda)} = \sum_{t=0}^{n} (\gamma_{t,i} - \alpha_i\ \gamma_{t,0})\ \rho_t^{\nu} = \sum_{t=1}^{n} C_{t,i}\ \rho_t^{\nu} ,$$

car $g_{\lambda,i}(\rho_0) - \alpha_i\ g_{\lambda,0}(\rho_0) = 0$.

En effet, $g_{\lambda,0}$ est de degré $\leqslant n$, donc $g_{\lambda,0}(\rho_0) \neq 0$, et

$$(g_{\lambda,0}(\rho_0)\ ,\ \dots\ g_{\lambda,n}(\rho_0))$$

est vecteur propre associé à ρ_0 , donc est proportionnel à $(1\ ,\ \alpha_1\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_n)$.

Ceci démontre la première partie du théorème.

Pour la dernière partie, on montre que si $\rho_1\ ,\ \rho_2\ ,\ \dots\ ,\ \rho_x$ sont des racines de f , de même valeur absolue que ρ_1 , il existe une infinité de ν tels que

$$(C_{1,i}\ \rho_1^{\nu} + \dots + C_{x,i}\ \rho_x^{\nu})/\rho_1^{\nu}$$

est minoré par un nombre strictement positif pour un $i \in \{0\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ n\}$, en montrant que $C_{1,i} \neq 0$ pour un i .

Exemple de développements périodiques : Développement à une seule ligne.

THÉORÈME 7. - Les nombres $\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_n$ de $\mathfrak{F}_0$ admettent par l'A. J. P. le développement purement périodique à une seule ligne $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_n)$ si, et seulement si,

$$\alpha_n = \rho_0\ ,\ \alpha_i = \rho_0^{n-i+1} - a_n\ \rho_0^{n-i} - \dots - a_{i+1}\ \rho_0 \qquad (i = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n-1)\ ,$$

où ρ_0 est la racine dans $\mathfrak{F}_0$ supérieure à 1 en valeur absolue de

$$f(\rho) = \rho^{n-1} - a_n\ \rho^{n} - \dots - a_1\ \rho - 1 = 0\ ,$$

où $a_i \in \mathcal{L}$ $(i = 1 , \dots , n)$; $|a_n| > 1$; $|a_n| > |a_i|$ $(i = 1 , 2 , \dots , n - 1)$

Preuve. - Pour la condition nécessaire, posons $\rho_0 = \alpha_n$. Les formules (1) montrent que $\alpha_{n-1} = \alpha_n(\alpha_n - a_n) = \rho^2 - a_n \rho_0$, et par récurrence

$$\alpha_i = \rho_0^{n-i+1} - a_n \rho_0^{n-i} - \dots - a_{i+1} \rho_0 ,$$

et $\alpha_1 = a_1 + (1/\alpha_n)$ entraîne que $f(\rho_0) = 0$.

Pour la condition suffisante, $\alpha_1 = (1/\rho_0)(a_1 \rho_0 + 1) = a_1 + (1/\alpha_n)$,

$\alpha_i = (1/\rho_0^i)(a_i \rho_0^i + a_{i-1} \rho_0^{i-1} + \dots + a_1 \rho_0 + 1) = a_i + (\alpha_{i-1}/\alpha_n)$ $(i = 2,\dots,n)$,

et $|\rho_0| = |a_n| > 1$ entraîne $a_1 = E(\alpha_1)$ et $\alpha_n^{(1)} = \alpha_n$.

Puis $|\alpha_1| = |a_1|$ (ou $a_1 = 0$ et $|\alpha_1| < 1$), donc $|\alpha_1| < |\alpha_n|$, alors $E(\alpha_2) = a_2$, $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1$, et ainsi de suite.

THÉORÈME 8. - Soit ρ_0 un P. V. élément unité de $\mathfrak{F}_0$, de degré $(n + 1)$ sur $\mathfrak{F}$, racine de $f(\rho) = \rho^{n+1} - a_n \rho^n - \dots - a_1 \rho - a_0$ $(a_0 \in F_q^*)$.

Soient $\alpha_1 , \dots , \alpha_{n-1}$ définis par

$$\alpha_i = \rho_0^{n-i+1} - a_n \rho_0^{n-i} - \dots - a_{i+1} \rho_0 .$$

Alors le développement de $(\alpha_1 , \dots , \alpha_{n-1} , \rho_0)$ est purement périodique de longueur $(n + 1)$ (sauf si $a_0 = 1$, auquel cas la ongueur est 1).

Le développement est

$$\begin{bmatrix} a_1 , & a_2 , & \dots , & a_{n-1} , & a_n \\ \dfrac{a_1}{a_0} , & \dfrac{a_2}{a_0} , & \dots , & \dfrac{a_{n-1}}{a_0} , & \dfrac{a_n}{a_0} \\ \dfrac{a_1}{a_0} , & \dfrac{a_2}{a_0} , & \dots , & \dfrac{a_{n-1}}{a_0} , & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{a_1}{a_0} , & a_2 , & \dots , & a_{n-1} , & a_n \end{bmatrix}$$

Puisque ρ_0 est un P. V. élément, on a $|a_n| > \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|$ et $|\rho_0| = |a_n|$.

Alors, $\alpha_1 = (1/\rho_0)(a_1 \rho_0 + a_0) = a_1 + (a_0/\rho_0)$ et $|\rho_0| > |a_0|$ entraînent $\alpha_n^{(1)} = \rho_0/a_0$ et $E(\alpha_1) = a$, d'où $|\alpha_1| < |\rho_0|$.

Puis $\alpha_2 = (1/\rho_0^2)(a_2 \rho_0^2 + a_1 \rho + a_0) = a_2 + (\alpha_1/\rho_0)$ entraîne $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1/a_0$ et $E(\alpha_2) = a_2$, d'où $|\alpha_2| < |\rho_0|$, et, de proche en proche, on a

$$\alpha_1^{(1)} = (\alpha_1/a_0) , \quad \alpha_2^{(2)} = (\alpha_2/a_0) , \dots , \alpha_n^{(1)} = \rho_0/a_0 .$$

En réutilisant les mêmes égalités, on obtient la troisième ligne du développement et ainsi de suite.

Remarquons qu'on peut, dans l'hypothèse du théorème, remplacer $a_0 \in F_q^*$ par a_0/b_0, où b_0 et $a_0 \in \mathcal{L}^*$, et a_0 divise a_i dans $\mathcal{L}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, nous obtenons ainsi de nouvelles classes de nombres dont le développement est périodique.

Dans le cas réel, nous avons obtenu le théorème suivant.

THÉORÈME 9. - Soit l'équation $g(x) = x^{n+1} - a_n x^n - \dots - a_1 x - (a_0/b_0) = 0$, où les nombres a_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ et b_0 sont des entiers positifs tels que $(a_0, b_0) = 1$ et $a_0 | a_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Soit α la racine positive de g, et considérons les nombres

$$\alpha_n = \alpha, \quad \alpha_i = \alpha^{n-i+1} - a_n \alpha^{n-i} - \dots - a_{i+1} \alpha \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Alors dans les deux cas suivants

1° $C_0 = a_0/b_0 > 1$ et $a_n > \max_{1 \le i \le n-1} a_i$ et $a_n > C_0$,

2° $C_0 < 1$ et $C_0 a_n \geq 1 + \max_{1 \le i \le n-1} a_i$,

le système $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ admet par l'A. J. P. un développement purement périodique de longueur $n + 1$. La période est

$$\begin{bmatrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_{n-1}, & a_n \\ \frac{a_1}{C_0}, & \frac{a_2}{C_0}, & \dots, & \frac{a_{n-1}}{C_0}, & \frac{a_n}{C_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_1}{C_0}, & a_2, & \dots, & a_{n-1}, & a_n \end{bmatrix}$$

Si de plus, on a :

1° $C_0 > 1$, $a_n \geq a_{n-1} + \dots + a_1 + C_0 + 1$,

2° $C_0 < 1$, $C_0 a_n \geq a_{n-1} + \dots + a_1 + 2C_0 + 1$,

alors le polynôme caractéristique du développement est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et admet un nombre de Pisot pour racine.

Il est assez simple de montrer que g admet une seule racine positive. La première partie du théorème résulte des relations

$$\alpha_1 = a_1 + (C_0/\alpha_n),$$

$$\alpha_i = a_i + (\alpha_{i-1}/\alpha_n) \quad (i = 2, \dots, n).$$

On montre que $[\alpha_n] = a_n$, puis $[\alpha_i] = a_i$ $(i = 1, \dots, n-1)$, et on continue la démonstration comme au théorème 8. ($[x]$ désigne la partie entière de x .)

Pour la seconde partie, on utilise le théorème suivant ([5] et [7]).

THÉORÈME 10. - Le polynôme caractéristique d'un développement est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et admet un nombre de Pisot pour racine, si, et seulement si,

$$\lim_{\nu\to\infty} (A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)}) = 0 .$$

En posant $H_\nu = A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)}$, on déduit de (3)

$$- H_{\nu+n} = (1/\alpha_n^{(\nu)}) H_\nu + (\alpha_1^{(\nu)}/\alpha_n^{(\nu)}) H_{\nu+1} + \dots + (\alpha_{n-1}^{(\nu)}/\alpha_n^{(\nu)}) H_{\nu+n} .$$

Si on pose $M_\nu = \max_{0\leq j\leq n-1} |H_{\nu+j}|$, on obtient :

$$|H_{\nu+n}| \leq ((1 + \alpha_1^{(\nu)} + \dots + \alpha_{n-1}^{(\nu)})/(\alpha_n^{(\nu)})) M_\nu .$$

Il suffit alors de trouver des conditions pour que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^{(\nu)}/\alpha_n^{(\nu)} < 1 .$$

Ici il y a $(n + 1)$ inégalités à vérifier.

Remarque. - BERNSTEIN ([2] et [3]) considère $\omega = \sqrt[n+1]{D^{n+1} + d}$, où d et D sont des entiers, $d \mid D$, $D \geq d(n - 1)$, $n \geq 2$. Alors les nombres

$$\omega , \omega^2 , \dots , \omega^n ,$$

ont un développement périodique avec une prépériode.

En considérant $\alpha = 1/(\omega - D)$, α vérifie toutes les hypothèses de la première partie du théorème 9 et le développement obtenu dans ce théorème à la même période que le développement de $\omega , \omega^2 , \dots , \omega^n$.

Exemple numérique. - Soit $\omega = \sqrt[8]{10^8 + 2}$, $\alpha = 1/(\omega - 8)$. α vérifie :

$g(x) =$

$$x^8 - 4.10^7 x^7 - 14.10^6 x^6 - 28.10^5 x^5 - 35.10^4 x^4 - 28.10^3 x^3 - 14.10^2 x^2 - 40 x - \frac{1}{2} = 0 ,$$

ω ne vérifie pas la condition de Bernstein (10 n'est pas supérieur à 2×7), et g vérifie les deux conditions du théorème 9.

En effet :

$$\frac{1}{2} 4.10^7 \geq 14 10^6 + 28 10^5 + 35 10^4 + 28 10^3 + 14 10^2 + 40 + 1 + 1 ,$$
$$2 10^7 \geq 17\ 179\ 442 .$$

Alors nous pouvons affirmer que le développement de $\alpha_1 , \dots , \alpha_7$, défini au théorème 9, est purement périodique de longueur 8 et que l'équation caractéristique est irréductible et admet un nombre de Pisot pour racine.

Le développement est

$$\begin{bmatrix} 40 , & 1400 , & \ldots\ldots\ldots\ldots , & 14.10^6 , & 410^7 \\ 80 , & 2800 , & \ldots\ldots\ldots\ldots , & 28.10^6 , & 810^7 \\ 80 , & 2800 , & \ldots\ldots\ldots\ldots , & 28.10^6 , & 410^7 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 80 , & 1400 , & \ldots\ldots\ldots\ldots , & 14.10^6 , & 410^7 \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BATEMAN (P. T.) and DUQUETTE (A. L.). - The analogue of the Vijayaraghavan numbers in fields of normal power series, Illinois J. Math., t. 6, 1962, p. 594-606.

[2] BERNSTEIN (L.). - Periodical continued fractions of degre n by Jacobi's algorithm, J. für die reine und angew. Math., t. 213, 1964, p. 31-38.

[3] BERNSTEIN (L.). - The Jacobi-Perron algorithm, Its theory and application. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 207).

[4] DUBOIS (Eugène). - Thèse 3e cycle, Math. Caen 1970.

[5] DUBOIS (E.) et PAYSAN - LE ROUX (R.). - Développements périodiques par l'A. J. P. et nombre de Pisot-Vijayaraghavan, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 649-652.

[6] GRANDET-HUGO (Marthe). - Nombres de Pisot dans un corps de séries formelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, n° 4, 12 p.

[7] PAYSAN - LE ROUX (Roger). - Thèse 3e cycle, Math, Caen 1970.

[8] PERRON (O.). - Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenburchalgorithmes, Mathematische Annalen, t. 64, 1967, p. 1-76.

(Texte reçu le 21 novembre 1972)

Eugène DUBOIS
Université de Caen
Mathématiques
14032 CAEN CEDEX