Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

PHILIPPE ROBBA

Prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables sur un corps valué

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, n° 1 (1971-1972), exp. n° 6, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_1_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° 6, 11 p.

6 décembre 1972

PROLONGEMENT ANALYTIQUE POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES SUR UN CORPS VALUÉ

par Philippe ROBBA

1. Introduction.

Soit K un corps valué ultramétrique complet et algébriquement clos. Comme dans le cas d'une variable, les séries de Laurent à plusieurs variables ne permettent pas de définir un prolongement analytique en dehors de leur domaine de convergence.

Suivant la technique inaugurée par M. KRASNER [2], on définit les éléments analytiques sur un ensemble A comme étant des limites uniformes sur A de fractions rationnelles sans singularité dans A , et l'on cherche pour quels ensembles A , dits analytiques, les éléments analytiques vérifient le principe du prolongement analytique.

Nous ne savons pas caractériser les ensembles analytiques, mais nous allons construire une classe K d'ensembles analytiques, qui, dans le cas d'une variable, coïncide avec la classe des quasi-connexes.

Auparavant, nous établirons des propriétés des singularités d'une fraction rationnelle au moyen d'une formule de Cauchy formelle.

2. Notations. Série de Laurent. Fonction de valuation.

2.1. $\bar{\underset{\sim}{R}}$ désigne la droite numérique achevée : $\bar{\underset{\sim}{R}} = R \cup \{- \infty , + \infty\}$ et $\bar{\underset{\sim}{R}}^m = (\bar{\underset{\sim}{R}})^m$. On note $v(x) = - \log |x|$ la valuation de $x \in K$. On suppose que $v(K)$ est dense dans $\bar{\underset{\sim}{R}}$. Pour $x = (x_1 , \ldots , x_m) \in K^m$, on notera

$$v(x) = (v(x_1), \ldots , v(x_m)) \in \bar{\underset{\sim}{R}}^m .$$

Pour μ et ν de $\bar{\underset{\sim}{R}}^m$, $\mu \leqslant \nu$ équivaut à $\mu_i \leqslant \nu_i$ pour $i = 1 , \ldots , m$.

Soient $\alpha = (\alpha_1 , \ldots , \alpha_m) \in \underset{\sim}{Z}^m$ un multi-indice, $X = (X_1 , \ldots , X_m)$ une famille d'indéterminées, et $y \in \bar{\underset{\sim}{R}}^m$, on pose

$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \ldots X_m^{\alpha_m} , \quad \alpha y = \textstyle\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i , \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^m |\alpha_i| ,$$

et, pour $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$,

$$\binom{\beta}{\alpha} = \binom{\beta_1}{\alpha_1} \ldots \binom{\beta_m}{\alpha_m} .$$

Soient $a_\alpha \in K$, définis pour tous les multi-indices α , considérons la série de Laurent $f = \sum_\alpha a_\alpha X^\alpha$.

On définit l'ensemble $\operatorname{conv}(f) \subset \bar{\underset{\sim}{R}}^m$ de la façon suivante :

2.2. Si $\mu \in \underset{\sim}{R}^m$, $\mu \in \operatorname{conv}(f)$ équivaut à

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} [v(a_\alpha) + \alpha\mu] = +\infty .$$

Si, pour $i \in I \subset [1 , \dots , m]$, $\mu_i = \varepsilon_i \infty$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$, et, pour

$$j \in J = [1 , \dots , m] \setminus I ,$$

$\mu_j \in \underset{\sim}{R}$, $\mu \in \operatorname{conv}(f)$ équivaut à $a_\alpha = 0$ pour $\varepsilon_i \alpha_i < 0$ et

$$\lim_{|\alpha|\to\infty, \alpha_i=0} [v(a_\alpha) + \textstyle\sum_{j\in J} \alpha_j \mu_j] = +\infty .$$

On voit que le domaine de convergence de la série f dans μ^m est l'image réciproque $v^{-1}(\operatorname{conv}(f))$ de $\operatorname{conv}(f)$.

2.3. Pour $\mu \in \operatorname{conv}(f)$, on pose

$$v(f , \mu) = \inf_{a_\alpha \neq 0} (v(a_\alpha) + \alpha\mu)$$

(On convient que si $\alpha_i = 0$, $\alpha_i \mu_i = 0$).

Cette application de $\operatorname{conv}(f)$ dans $\underset{\sim}{\bar{R}}$ s'appelle la fonction de valuation de f .

2.4. Lorsqu'il y a un seul multi-indice β tel que $v(f , \mu) = v(a_\beta) + \beta \mu$, on pose $\beta = N(f , \mu)$. On note $\operatorname{Reg}(f)$ l'ensemble des points où $N(f , \mu)$ est défini, et $Z(f) = \operatorname{conv}(f) \setminus \operatorname{Reg}(f)$.

2.5. L'ensemble $\operatorname{conv}(f)$ est convexe.

Preuve. - Soient p et $q \geq 0$, $p + q = 1$, λ et $\mu \in \operatorname{conv}(f)$. Si λ et $\mu \in \underset{\sim}{R}^m$

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}[v(a_\alpha) + \alpha(p\lambda + q\mu)] = p \lim_{|\alpha|\to\infty}[v(a_\alpha) + \alpha\lambda] + y \lim_{|\alpha|\to\infty}[v(a_\alpha) + \alpha\mu] = +\infty$$

et donc $p\lambda + q\mu \in \operatorname{conv}(f)$.

Si $\lambda_i = -\infty$ (resp. $+\infty$), par $p\lambda_i + q\mu_i$, il faudra entendre n'importe quel nombre $\leq \mu_i$ (resp. $\geq \mu_i$). Avec cette convention, on vérifie encore que

$$p\lambda + q\mu \in \operatorname{conv}(\beta) .$$

2.6. La fonction $v(f , \mu)$ est concave.

Preuve. - C'est l'enveloppe inférieure d'une famille de fonctions affines.

2.7. Dans $\operatorname{conv}^\circ(f)$, le graphe de la fonction $v(f , \mu)$ est un polyèdre (ayant éventuellement une infinité de faces).

2.8. L'ensemble $Z(f)$ est la projection des "arêtes" du polyèdre de valuation (Par arêtes, on entend les faces de dimension $n - 1$).

2.9. $\operatorname{Reg}(f) \cap \operatorname{conv}^\circ(f)$ est un ouvert. $v(f , \mu)$ y est différentiable et $N(f , \mu) = \operatorname{grad} v(f , \mu)$, enfin $N(f , \mu)$ y est localement constante. Les composantes, où $N(f , \mu)$ garde une valeur constante, sont les polytopes convexes qui sont les projections des faces du polyèdre de valuation de f .

2.10. PROPOSITION. - Soit $\mu \in \operatorname{conv}(f) \cap v(K^m) \cap \underset{\sim}{R}^m$. On a

$$v(f\ ,\ \mu) = \inf_{v(x)=\mu} v(f(x)) = \inf_{v(x-y)>\mu} v(f(x)) ,$$

pour tout y tel que $v(y) = \mu$, et si $\mu \in \mathrm{Reg}(f)$, on a plus précisément

$$v(f(x)) = v(f\ ,\ \mu) \qquad \text{si} \quad v(x) = \mu .$$

Principe de la démonstration. - Il est clair que, pour tout x tel que $v(x) = \mu$

$$v(f(x)) \geqslant v(f\ ,\ \mu) .$$

Soit A l'ensemble des α tels que $v(a_\alpha) + \alpha\mu = v(f\ ,\ \mu)$. A est non vide et fini. Si $\mu \in \mathrm{Reg}(f)$, A est réduit à un seul élément, et, pour $v(x) = \mu$,

$$v(f(x)) = v(f\ ,\ \mu) .$$

Dans tous les cas, posons

$$g(x) = \sum_{\alpha\in A} a_\alpha x^\alpha \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{\alpha\notin A} a_\alpha x^\alpha .$$

On voit que $v(h(x)) \geqslant v(h\ ,\ \mu) > v(f\ ,\ \mu)$. Tout revient alors à démontrer la proposition pour $g(x)$, et, en multipliant $g(x)$ par une puissance convenable de x , on se ramène au cas d'un polynôme.

2.11. COROLLAIRE. - Il y a unicité du développement en série de Laurent. Plus précisément, soient f et g deux séries de Laurent telles que

$$\mathrm{conv}(f) \cap \mathrm{conv}(g) \cap v(K^m) \cap \mathbb{R}^m \neq \emptyset .$$

Soit $\mu \in \mathrm{conv}(f) \cap \mathrm{conv}(g) \cap v(K^m) \cap \mathbb{R}^m$; si, pour tout x tel que $v(x) = \mu$, on a $f(x) = g(x)$, les deux séries coïncident.

2.12. Principe d'unicité : Soient A le domaine de convergence d'une série de Laurent, f , et $f(x)$ la somme de cette série. Si f s'annule au voisinage d'un point x_0 de A , f est identiquement nulle dans A .

Preuve. - Par un développement en série de Taylor autour de x , on commence par prouver que f est nulle dans le polycercle $\{x \mid v(x) = v(x_0)\}$, le résultat découle alors de 2.11.

3. Formule de Cauchy dans les polycouronnes.

3.1. Dans 3.1. et 3.2., nous travaillons dans K (c'est-à-dire que $m = 1$).

Notons $C_r = \langle x \mid |x| = r \rangle$ le cercle de centre 0 et de rayon r contenu dans K , r appartenant au groupe des valeurs de K . Notons $H(C_r)$ l'espace vectoriel des éléments analytiques sur C_r (c'est-à-dire des sommes de séries de Laurent sur C_r) muni de la norme de la convergence uniforme.

LEMME. - Il existe une forme linéaire φ_r continue sur $H(C_r)$, telle que $\varphi_r(x^n) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$ et $\varphi_r(1/x) = 1$.

Preuve. - Cela résulte du fait que les fonctions x^n , $n \in \mathbb{Z}$, sont topologiquement libres dans $H(C_r)$, et forment une famille totale.

3.2. LEMME. - r et r' appartenant au groupe des valeurs, $r > r'$, soit f définie sur $C_r \cup C_{r'}$, avec $f \in H(C_r) \oplus H(C_{r'})$. Alors la fonction

$$y(z) = \varphi_r(f(x)/(x - z)) - \varphi_{r'}(f(x)/(x - z)) ,$$

est développable en série de Laurent dans la couronne $r' < |z| < r$. Si, de plus, f est la restriction d'une fonction développable en série de Laurent dans la couronne $r' \leqslant |x| \leqslant r$, on a

$$f(z) = g(z) \quad \text{pour} \quad r' < |z| < r .$$

Preuve. - On raisonne comme dans le cas complexe en développant $1/(x - z)$ suivant les puissances positives de z sur C_r et suivant les puissances négatives de z sur $C_{r'}$.

3.3. Etant données les formes linéaires continues $\varphi_1 , \ldots , \varphi_m$ définies sur $H(C_1) \ldots H(C_m)$, il leur correspond une forme $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_m$ définie sur $\bigotimes_{1\leqslant j\leqslant m} H(C_j) = H(\prod_{1\leqslant j\leqslant m} C_j)$ où $H(\prod_{1\leqslant j\leqslant m} C_j)$ désigne l'espace des fonctions développables en séries de Laurent sur $\prod C_j$, muni de la norme de la convergence uniforme. On peut calculer $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_m(f)$ par "intégrations" successives :

$$(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_m)(f(x_1 , \ldots , x_m)) = \varphi_1(\ldots \varphi_m)(f(x_1 , \ldots , x_m)\ldots) ,$$

le résultat ne dépendant pas de l'ordre d'intégration.

Etant donnés les couples de nombres (r_j , r'_j), $1 \leqslant j \leqslant m$, appartenant au groupe des valeurs nous noterons D_m la polycouronne formée des $x \in K^m$ tels que $r'_j < |x_j| < r_j$, et D_m la polycouronne formée des x tels que $r'_j \leqslant |x_j| \leqslant r_j$.

On appellera frontière distinguée de D_m l'ensemble $\partial D_m = \prod_{j=1}^m (C_{r_j} \cup C_{r'_j})$, et on notera $H(\partial D_m)$ l'espace des fonctions définies sur ∂D_m dont la restriction à chaque $\prod_{j=1}^m C_{p_j}$ ($p_j = r_j$ ou r'_j) appartient à $H(\prod_{j=1}^m C_{p_j})$. On pose

$$\Phi_m = (\varphi_{r_1} - \varphi_{r'_1}) \otimes \ldots \otimes (\varphi_{r_m} - \varphi_{r'_m}) ,$$

Φ_m est une forme linéaire sur $H(\partial D_m)$.

PROPOSITION. - Si $f(x) \in H(\partial D_m)$, la fonction de $z = (z_1 , \ldots , z_m)$, $g(z) = \Phi_m[f(x)/(x_1 - z_1) \ldots (x_m - z_m)]$ est développable en série de Laurent dans D_m. Si f est la restriction à ∂D_m d'une fonction f définie dans D_m, séparément développable en série de Laurent en chacune des variables, on a, dans D_m, $f(z) = g(z)$.

Preuve. - La première partie de la proposition se démontre comme en 3.2. en développant $1/(x_1 - z_1) \ldots (x_m - z_m)$ en série entière convenable suivant les différentes portions de ∂D_m.

La réciproque se démontre par récurrence sur m. Pour $m = 1$, cela résulte du lemme 3.2. Alors, les variables $x_1 , \ldots , x_{m-1}$ étant fixées, on a

$$(\varphi_{r_m} - \varphi_{r'_m})[f(x)/(x_1 - z_1) \dots (x_m - z_m)]$$
$$= f(x_1 , \dots , x_{m-1}\ z_m)/(x_1 - z_1) \dots (x_{m-1} - z_{m-1}) ,$$

d'après le lemme 3.2 et les hypothèses de la proposition. Il résulte alors de l'hypostèse de récurrence que

$$\Phi_{m-1}[f(x_1 , \dots , x_{m-1} , z_m)/(x_1 - z_1) \dots (x_{m-1} - z_{m-1})]$$
$$= f(z_1 , \dots , z_{m-1} , z_m) = f(z) ,$$

d'où le résultat.

3.4. On en déduit le corollaire important qui nous servira par la suite.

THÉORÈME. - Si dans la polycouronne $\bar{D} = \{x \mid x \in K^m , r'_j \leq |x_j| \leq r_j\}$, où r_j et r'_j appartiennent au groupe des valeurs de K , f est séparément développable en série de Laurent par rapport aux variables x_j d'indices j tels que $r'_j \neq r_j$, et si dans les polycercles $\prod_{j=1}^m C_{p_j}$, où $p_j = r_j$ ou r'_j , f est développable en série de Laurent, alors f est développable en série de Laurent dans $\bar{D}$ tout entier.

Preuve. - Si pour tout j , $r'_j < r_j$, il résulte de la proposition 3.3 que f est développable en série de Laurent dans D . On vérifie alors que cette série, converge dans $\bar{D}$, sa somme coïncide donc avec f dans $\bar{D}$.

Pour certains j , $r'_j = r_j$, on adapte les résultats de la proposition 3.3 en n'effectuant les "intégrations" successives que pour les j tels que $r'_j \neq r_j$.

3.5. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les assertions analogues valables pour des séries de Taylor.

3.6. Si K est supposé maximalement complet, le théorème de prolongement de Hahn-Banach est vrai pour les espaces normés sur K [1]. On peut alors, dans les lemmes 3.1 et 3.2, remplacer $H(C_r)$ par $B(C_r)$, espace vectoriel des fonctions définies sur C_r à valeurs dans K , muni de la norme de la convergence uniforme. Dans la proposition 3.3, on peut remplacer $H(\partial D_m)$ par $B(\partial D_m)$. On obtient alors le résultat suivant.

THÉORÈME. - Si dans la polycouronne $D = \{x \mid r'_j < |x_j| < r_j\}$ la fonction f est bornée et séparément développable en série de Laurent, f est globalement développable en série de Laurent.

4. Zéro d'une série de Laurent. Singularités d'une fraction rationnelle.

4.1. PROPOSITION. - Soient f une série de Laurent, et $\mu \in \mathrm{conv}(f) \cap v(K^m) \cap \mathbb{R}^m$. Si $\mu \in \mathrm{Reg}(f)$, $f(x)$ ne s'annule pas dans le polycercle $\{x \mid v(x) = \mu\}$; si $\mu \in Z(f)$, il existe x tel que $v(x) = \mu$ et $f(x) = 0$.

Preuve. - Si $\mu \in \mathrm{Reg}(f)$, on sait que, pour $v(x) = \mu$, $v(f(x)) = v(f , \mu)$, donc $f(x) \neq 0$. D'autre part, la propriété est bien connue pour $m = 1$ [3]. La démonstration se fait par récurrence sur m en fixant convenablement l'une des variables.

4.2. Soit $R(x) = P(x)/Q(x)$ une fraction rationnelle, où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux. On prolonge par continuité, lorsque c'est possible, la fonction $R(x)$ aux points où P et Q ont des zéros communs.

Soit A l'ensemble des zéros de R, on note $Z(R)$ l'adhérence dans $\bar{\mathbb{R}}^m$ de $v(A)$. Soit B l'ensemble des singularités de R, on note $W(R)$ l'adhérence dans $\bar{\mathbb{R}}^m$ de $v(B)$. $Z(R)$ et $W(R)$ sont respectivement contenus dans $Z(P)$ et $Z(Q)$ d'après 4.1.

On pose $v(R, \mu) = v(P, \mu) - v(Q, \mu)$.

$v(R, \mu)$ est une fonction affine par morceaux, mais n'est plus concave. Son graphe est le polyèdre de valuation de R.

On note $\mathrm{Reg}(R) = \complement(Z(R) \cup W(R))$. Si $\mu \in \mathrm{Reg}(R) \cap v(K^m)$, alors

$$v(R(x)) = v(R, \mu),$$

pour $v(x) = \mu$.

On note $N(R, \mu)$ le gradient de la fonction $v(R, \mu)$ pour $\mu \in \mathrm{Reg}(R)$. Si $\mu \notin Z(P) \cup Z(Q)$, on a $N(R, \mu) = N(P, \mu) - N(Q, \mu)$.

Nous allons préciser la forme de $Z(R)$ et $W(R)$.

4.3. LEMME. - <u>Soit</u> $(A_i)_{i\in I}$ <u>une famille enchaînée d'ouverts contenus dans</u> K^m. <u>Soit</u> f <u>définie sur</u> $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ <u>telle que sa restriction à chaque</u> A_i <u>soit développable en série de Laurent. Alors</u> f <u>est développable en série de Laurent dans</u> A.

C'est une conséquence immédiate de 2.11 et 2.12.

4.4. LEMME. - <u>Soit</u> Π <u>une composante convexe de</u> $\mathrm{Reg}(Q)$. <u>Alors</u> $R = P/Q$ <u>est développable en série de Laurent dans</u> $v^{-1}(\Pi)$.

<u>Preuve</u>. - Soit $Q(x) = \sum_{\text{finie}} a_\alpha x^\alpha$. D'après 2.8, il existe β tel que, dans $v^{-1}(\Pi)$, on ait $v(a_\alpha x^\alpha) > v(a_\beta x^\beta)$ pour $\alpha \neq \beta$. Posons

$$Q'(x) = \sum_{\alpha\neq\beta} a_\alpha / a_\beta \, x^{\alpha-\beta}.$$

On a alors

$$R(x) = \frac{P(x)}{a_\alpha x^\beta} \sum_{n=0}^{\infty} [Q'(x)]^n,$$

la série convergeant dans $v^{-1}(\Pi)$.

4.5. THÉORÈME. - <u>Les composantes convexes de</u> $\complement W(R)$ <u>sont des polytopes convexes, et</u> R <u>est développable en série de Laurent dans les images réciproques de</u>

<u>ces composantes connexes.</u>

<u>Preuve</u>. - Soit Π une composante connexe de $\complement W(R)$. Π est ouvert puisque $W(R)$ est fermé. $v(K^m) \cap \mathrm{Reg}(Q)$ est dense dans $\complement W(R)$. Les cubes fermés contenus dans Π ayant leurs sommets dans $v(K^m) \cap \mathrm{Reg}(Q)$ forment donc une famille enchaînée engendrant Π . Soit Σ un de ces cubes. Dans la polycouronne $v^{-1}(\Sigma)$, R est séparément développable en série de Laurent. Si σ est un sommet de Σ , dans le polycercle $v^{-1}(\sigma)$, R est développable en série de Laurent d'après le lemme 4.4. Il résulte alors du théorème 3.4 que R est développable en série de Laurent dans $v^{-1}(\Sigma)$. Il résulte alors du lemme 4.3 que R est développable en série de Laurent dans $v^{-1}(\Pi)$. D'après 2.4, cette série converge dans $v^{-1}(\widehat{\Pi})$, où $\widehat{\Pi}$ désigne l'enveloppe convexe de Π . Dans $v^{-1}(\widehat{\Pi})$, R n'a donc pas de singularités, il en résulte que $\widehat{\Pi} \cap W(R) = \emptyset$, et donc $\widehat{\Pi} = \Pi$. Π est donc convexe. Le fait que ce soit un polytope résulte du fait que $W(R) \subset Z(Q)$.

4.6. Par définition, si $a \in K^m$ est une singularité de R , $v(a) \in W(R)$, réciproquement on a le théorème suivant.

THÉORÈME. - <u>Si</u> $\mu \in N(R) \cap v(K^m)$, <u>la fraction rationnelle</u> R <u>a des singularités dans le polycercle</u> $v(x) = \mu$.

<u>Preuve</u>. - Soit $\mu \in W(R) \cap v(K^m)$, et supposons que $R(x)$ n'ait pas de singularités dans le polycercle $v(x) = \mu$.

Supposons d'abord qu'il existe un segment, centré en μ et parallèle à l'un des axes de $\mathbb{R}^m$ (par exemple, l'axe $o\mu_m$), intersectant $W(R)$ seulement au point μ . Soient (μ' , ρ) et (μ' , r) les deux extrémités de ce segment, avec $r < \mu_m < \rho$ ρ et r appartenant à $v(K^-)$.

Il résulte du théorème 4.5 que R est développable en série de Laurent dans les polycercles $v(x) = (\mu' , \rho)$ et $v(x) = (\mu' , r)$. Lorsque x' est fixé avec $v(x') = \mu'$, on voit que $R(x' , x_m)$ est développable en série de Laurent par rapport à la variable x_m . Il résulte alors du théorème 3.4 que R est développable en série de Laurent dans $A = \{x \mid v(x') = \mu' , r \leq v(x) \leq \rho\}$. Soient Π et Π' les composantes connexes de $\complement W(R)$ contenant (μ' , ρ) et (μ' , r) respectivement. Posons $B = v^{-1}(\Pi)$ et $B' = v^{-1}(\Pi')$. Le triplet (A , B , B') est enchaîné. Comme R est développable en série de Laurent dans A , B et B' (théorème 4.5), il résulte du lemme 4.3 que R est développable en série de Laurent dans $A \cup B \cup B'$ et donc dans $v^{-1}(\widehat{\Pi \cup \Pi'})$. R n'a pas de singularités dans $v^{-1}(\widehat{\Pi \cup \Pi'})$, donc $W(R) \cap (\widehat{\Pi \cup \Pi'}) = \emptyset$, ce qui contredit le fait que $\mu \in W(R) \cap (\widehat{\Pi \cup \Pi'})$. R a donc des singularités dans le polycercle $v(x) = \mu$.

S'il n'existe pas de segment contenant μ , parallèle à son axe et non contenu dans $W(R)$, on se ramène au cas précédent par un changement de variable (polynomial) convenable.

5. Ensembles saturés projectivement connexes.

5.1. L'ouvert $A \subset K^m$ est dit saturé si $v^{-1}(v(A)) = A$; autrement dit si $x \in A$ et $v(y) = v(x)$ impliquent $y \in A$.

Le domaine de convergence d'une série de Laurent est saturé, c'est ce qui motive cette définition.

5.2. L'ensemble saturé A est dit projectivement connexe s'il existe Ω, ouvert connexe de $\mathbb{R}^m$, tel que $\Omega \cap v(K^m) \subset v(A) \subset \bar{\Omega} \cap v(K^m)$.

5.3. THÉORÈME. - Soient A un ensemble saturé projectivement connexe, et f un élément analytique sur A. Alors f est somme d'une série de Laurent convergeant sur A.

Preuve. - Soit R une fraction rationnelle sans singularités dans A. Montrons que $W(R) \cap \Omega = \emptyset$, $W(R)$ est formé de polyèdres de dimension $m - 1$ contenus dans des hyperplans orthogonaux à des vecteurs de coordonnées entières. Comme $v(K)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, et est dense dans $\mathbb{R}$, il en résulte que $W(R) \cap v(K^m)$ est dense dans $W(R)$. Alors $W(R) \cap \Omega$ étant ouvert dans $W(R)$, $W(R) \cap \Omega \cap v(K^m)$ est dense dans $W(R) \cap \Omega$. Mais

$$W(R) \cap \Omega \cap v(K^m) \subset W(R) \cap v(A) ,$$

et, puisque A est saturé et que R n'a pas de singularités dans A,

$$W(R) \cap v(A) = \emptyset ,$$

d'où le résultat.

Ω, étant connexe, est donc contenu dans une des composantes connexes de $\complement W(R)$, soit Π ; et alors $v(A) \subset \Pi$ puisque $v(A) \cap W(R) = \emptyset$. Rappelons que, dans Π, $v(R, \mu)$ est une fonction concave.

Soit alors R une suite de fractions rationnelles sans singularités dans A convergeant uniformément vers f sur A. Soit Π_n le polytope convexe associé à R_n contenant Ω. Dans Π_n, R_n est développable en série de Laurent (théorème 4.5), soit $F_n = \sum_\alpha a_{\alpha,n} X^\alpha$ cette série. Soit $\mu \in v(A)$, alors $v(F_n - F_m, \mu) \to +\infty$, quand n et m tendent vers $+\infty$, ce qui montre que, pour α **fixé**, $a_{\alpha,n}$ est une suite de Cauchy qui converge vers un élément a_α de K. Soit alors $F = \sum a_\alpha X^\alpha$. On voit que $\mu \in \operatorname{conv}(F)$ et que, pour $v(x) = \mu$, on a

$$\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha = \lim_{n\to\infty} \sum_\alpha a_{\alpha,n} x^\alpha = \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x) .$$

5.4. THÉORÈME. - Un ensemble saturé projectivement connexe est un ensemble analytique.

C'est une conséquence immédiate de 2.12 et du théorème précédent.

5.5. Notons $\mathcal{C}$ la classe des ouverts saturés projectivement connexes (une origine et des axes ayant été choisis une fois pour toutes). Nous dirons que f et $\mathcal{C}$-analytique sur Λ, si $\Lambda = \bigcup_{i \in I} \Lambda_i$, la famille (Λ_i) étant enchaînée, si f est un élément analytique sur chaque Λ_i et si les Λ_i appartiennent à $\mathcal{C}$.

PROPOSITION. - Les fonctions $\mathcal{C}$-analytiques sont développables en série de Laurent sur leur domaine de définition.

C'est une conséquence immédiate du théorème 5.3 et du lemme 4.3.

On voit donc que la classe $\mathcal{C}$ ne permet pas d'obtenir une classe assez vaste de fonctions analytiques.

6. Ensembles quasi-connexes.

6.1. Toutes les notions introduites jusqu'ici peuvent être relativisés par un changement d'origine. Si $y \in K^m$, on pose $v_y(x) = v(x - y)$; on introduit la fonction de valuation d'une fraction rationnelle R relativement à y :

$$v_y(R(x)\ ,\ \mu) = v(R(x + y)\ ,\ \mu)\ .$$

On vérifie sans peine que si $v(y - z) = \mu$, alors $v_y(R\ ,\ \mu) = v_z(R\ ,\ \mu)$.

Λ est dit saturé relativement à y si $v_y^{-1}(v_y(\Lambda)) = \Lambda$.

Si $\Lambda \subset K^m$, nous appellerons partie saturée de Λ relativement à y, et nous noterons Λ_y^s le plus grand sous-ensemble de Λ saturé relativement à y. On voit que "$x \in \Lambda_y^s$" équivaut à "pour tout $z \in K^n$,

$$v_y(z) = v_y(x) \text{ implique } z \in \Lambda \text{ ".}$$

Λ_y^s est la réunion de tous les polycercles centrés en y contenus dans Λ.

6.2. L'ouvert $\Lambda \subset K^m$ est appelé quasi-connexe élémentaire si, et seulement si, quel que soit $y \in \Lambda$, il existe un ouvert Ω de $\overline{R}^m$ tel que

(a) $\Omega \cap v(K^m) \subset v_y(\Lambda_y^s)$;

(b) (Ω_k) désignant la famille des composantes connexes de Ω, la famille $(\overline{\Omega}_k \cap R^m)$ est enchaînée ;

(c) $v_y(\Lambda) \subset (\bigcup_k \overline{\Omega}_k)$.

Λ est dit quasi-connexe si c'est la réunion d'une famille enchaînée de quasi-connexes élémentaires.

Si $m = 1$, un quasi-connexe élémentaire est un quasi-connexe au sens de KRASNER [2].

6.3. Soient Λ un quasi-connexe élémentaire, f un élément analytique sur Λ, $y \in \Lambda$. Si R_n est une suite de fractions rationnelles sans singularités sur Λ et convergeant uniformément sur Λ vers f, on vérifie sans peine que, pour $\mu \in \overline{v_y(\Lambda)}$, $v_y(R_n\ ,\ \mu)$ converge vers une limite, et que cette limite ne dépend pas de la suite R_n considérée. On note donc cette limite $v_y(f\ ,\ \mu)$.

Sur $v^{-1}(\bar{\Omega}_k) \cap A_y^s$, f est développable en une série de Laurent f_k (théorème 5.3), et l'on a, pour $\mu \in \Omega_k$, $v_y(f , \mu) = f_k , \mu)$. Pour $\mu \in A_y^s$, on a

$$v_y(f , \mu) = \inf_{v_y(x)=\mu} v(f(x)) .$$

Si y et $z \in A$, $v(y - z) = \mu$, alors $v_y(f , \mu) = v_z(f , \mu)$.

6.4. THÉORÈME. - Un ensemble quasi-connexe est analytique.

Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où A est un quasi-connexe élémentaire.

6.5. LEMME. - Soit Ω un ouvert connexe de $\bar{\underset{\sim}{R}}^m$, et soit f un élément analytique sur $v_y^{-1}(\Omega)$. S'il existe $\mu \in \Omega \cap \underset{\sim}{R}^m$ tel que $v_y(f , \mu) = + \infty$, on a $v_y(f , \mu) = + \infty$ pour tout $\mu \in \bar{\Omega} \cap \underset{\sim}{R}^m$.

Preuve. - La fonction $v_y(f , \mu)$ se prolonge à $\hat{\bar{\Omega}}$, d'après le théorème 5.3, $\hat{\Omega}$ étant convexe et la fonction $v_y(f , \mu)$ étant concave, on voit que si, pour $\lambda \in \bar{\Omega} \cap \underset{\sim}{R}^m$, $v_y(f , \lambda) = + \infty$, alors $v_y(f , \mu) = + \infty$ pour tout $\mu \in \hat{\Omega}$, et le résultat reste vrai par continuité pour $\mu \in \bar{\Omega} \cap \underset{\sim}{R}^m$.

6.6. Démonstration du théorème 6.4. - Soit f un élément analytique sur A , et supposons que f soit nulle au voisinage de y et ne soit pas nulle au voisinage de z .

Soient $\Omega_1 , \ldots , \Omega_n$ les ouverts connexes de $\bar{\underset{\sim}{R}}^m$, annoncés par la définition 6.2, tels que

$$v_y^{-1}(\Omega_k) \subset A , \quad \bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_{k+1} \cap \underset{\sim}{R}^m \neq \emptyset \quad \text{pour} \quad 1 \leq k < n , \quad v_y(y) \in \bar{\Omega} , \text{ et } \quad v_y(z) \in \bar{\Omega}_n .$$

Soient $\mu_k \in \bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_{k+1} \cap \underset{\sim}{R}^m$. Par application répétée du lemme 6.5, on voit que, puisque $v(f , \mu) = + \infty$ au voisinage de $v_y(y)$, on a $v_y(f , \mu_k) = + \infty$ et donc $v_y(f , \lambda) = + \infty$ avec $\lambda = v(z - y)$.

Un raisonnement analogue relatif à z montre que $v_z(f , \lambda) \neq + \infty$. Or, d'après 6.4, on doit avoir $v_z(f , \lambda) = v_y(f , \lambda)$; il y a contraction.

6.7. On notera $\mathcal{K}$ la classe des ensembles quasi-connexes. La classe $\mathcal{K}$ n'épuise pas la classe $\mathfrak{A}$ des ensembles analytiques (on voit en effet que c'est le cas si $m = 1$ [4], mais les fonctions $\mathcal{K}$-analytiques forment une famille assez riche pour étudier le prolongement analytique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] INGLETON (A. W.). - The Hahn-Banach theorem for non-archimedean valued fields, Proc. Cambr. phil. Soc., t. 48, 1952, p. 41-45.

[2] KRASNER (M.). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du C. N. R. S. : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143. 1964. Clermont-Ferrand] ; p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.

[3] LAZARD (M.). - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 14 ; p. 47-76).

[4] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Prolongement analytique en analyse p-adique, Séminaire de théorie des nombres, Université de Bordeaux, 1970/71 (multigraphié).

(Texte reçu le 10 janvier 1972)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS