MICHEL MENDÈS FRANCE

Quelques problèmes relatifs à la théorie des fractions continues limitées

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, nº 1 (1971-1972), exp. nº 2, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_1_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° 2, 6 p.

8 novembre 1971

QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS À LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES LIMITÉES

par Michel MENDÈS FRANCE

1. Généralités.

Soit p/q un nombre rationnel. On sait qu'on peut le développer en fraction continue (limitée), et ceci de façon unique, sous la forme

$$p/q = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

où les entiers a_0 , a_1 , ... , a_n vérifient les conditions

(i) $a_0 \in \mathbb{Z}$,
(ii) a_1 , a_2 , ... , a_{n-1} sont positifs non nuls,
(iii) $a_n \geqslant 2$.

Nous nous intéresserons tout particulièrement à la "profondeur" n (nombre de traits de fraction) de la fraction continue de p/q .

On pose $n = \psi(p/q)$. La fonction ψ est ainsi définie sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

2. Résultats connus.

La fonction ψ a été étudié par G. LAMÉ [4] qui en a donné des majorations, mais ce n'est que récemment que l'on a pu donner des estimations plus précises. En 1968, HEILBRONN [3] a montré que l'on a

(1) $$1/(\varphi(n)) \sum_{k\leqslant n,(k,n)=1} \psi(k/n) = 12/\pi^2 \log 2 \log n + O(\log \log n)^4 .$$

Deux ans plus tard, J. D. DIXON a complété ce résultat ([1], [2]) de la façon suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout couple d'entiers (k , n) vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n \leqslant x$, on ait

$$(2) \qquad |\psi(k/n) - 12/\pi^2 \log 2 \log n| < (\log n)^{(1/2)+\varepsilon} ,$$

sauf peut-être pour au plus $x^2 \exp(-c(\log x)^{\varepsilon/2})$ couples.

Ces deux résultats suggèrent un certain nombre de problèmes que je voudrais exposer ici. Toutes ces questions se ramènent plus ou moins à la suivante :

Soit p_1/q_1 , p_2/q_2 , ... , p_n/q_n , ... une suite infinie de nombres rationnels, disons tels que $p_n < q_n$. Que peut-on dire de la suite $\psi(p_1/q_1)$, $\psi(p_2/q_2)$, ... ? En particulier, est-il vrai que $\psi(p_n/q_n)$ soit de l'ordre de $\log q_n$? Ou plus vaguement, sait-on si $\psi(p_n/q_n)$ reste borné ou non ? Selon le choix de la suite (p_n/q_n) , on touche à des problèmes de natures très différentes.

3. Cas des fractions rationnelles.

Nous nous proposons de démontrer dans ce paragraphe le résultat suivant :

THÉORÈME 1. - Soit F une fraction rationnelle à coefficients rationnels ($F(X) \in \mathbb{Q}(X)$) . La suite $(\psi(F(n)))$ est périodique à partir d'un certain rang.

Une conséquence en est que $\overline{\lim}\ \psi(F(n)) < \infty$. Ce résultat a été déjà trouvé par A. SCHINZEL [7].

Démonstration du théorème. - Dans l'anneau $Z[X]$ des polynômes à coefficients entiers, on désigne par $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{N}$) l'ensemble des polynômes dont le coefficient du terme le plus élevé est un entier strictement positif (resp. négatif). La partie $\mathcal{P}$ (appelée l'ensemble des polynômes positifs) induit sur $Z[X]$ un ordre total noté $\succ$. Ainsi, si $A(X) \in Z[X]$, on a une des trois possibilités suivantes à l'exclusion des deux autres : $A(X) \succ 0$, $A(X) \prec 0$, $A(X) = 0$.

On dira que les deux polynômes à coefficients entiers $A(X) \in \mathcal{P}$ et $B(X) \in \mathcal{P}$ sont "divisibles" s'il existe deux polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ à coefficients entiers tels que

$$(3) \qquad \begin{cases} A(X) = B(X)\ Q(X) + R(X) , \\ Q(X) \succcurlyeq 0 , \\ R(X) \succcurlyeq 0 , \\ R(X) \prec B(X) , \end{cases}$$

$Q(X)$ s'appelle le quotient, et $R(X)$ le reste.

Il est clair que deux polynômes à coefficients entiers dans $\mathcal{P}$ ne sont pas toujours divisibles (par exemple $A(X) = X$ et $B(X) = 2$) . Ils sont toutefois "presque" divisibles en ce sens que l'on a le résultat suivant :

LEMME 1. - Soient $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes positifs à coefficients entiers. Alors il existe un entier $g \geqslant 1$ tel que, pour tout $h \in \{0 , 1 , \ldots , g - 1\}$, les deux polynômes $A(gX + h)$ et $B(gX + h)$ soient divisibles.

Démonstration. - On effectue la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$:

$$(4) \qquad \begin{cases} A(X) = B(X)\ Q(X) + R(X) , \\ \text{degré } (R) < \text{degré } (B) . \end{cases}$$

Si $A(X)$ est de degré moindre que celui de $B(X)$, $A(X)$ et $B(X)$ sont divisibles au sens de (3) avec $Q(X) = 0$ et $R(X) = A(X)$.

Sinon, $Q(X)$ est un polynôme à coefficients rationnels, le coefficient du terme de degré le plus élevé étant strictement positif. Soit $g \geqslant 1$ un dénominateur commun des coefficients de $Q(X) - Q(0)$ (on prend g quelconque si $Q(X)$ est constant). Soit $h \in \{0 , 1 , 2 , \dots , g - 1\}$. La formule de Taylor s'écrit

$$Q(gX + h) = Q(h) + Q_1(X) ,$$

où $Q_1(X) = gX\ Q'(h)/1! + g^2\ X^2\ Q''(h)/2! + \dots$

$Q_1(X)$ est donc un polynôme à coefficients entiers, et de plus $Q_1(X) \geqslant 0$.

Soit $\varepsilon \in \{0 , 1\}$, défini de la façon suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon = 0 & \text{si } Q(h) \text{ non entier,} \\ \varepsilon = 0 & \text{si } Q(h) \text{ entier et } R(X) \geqslant 0 , \\ \varepsilon = 1 & \text{si } Q(h) \text{ entier et } R(X) < 0 . \end{cases}$$

On désigne par $\{Q(h)\}$ la partie fractionnaire de $Q(h)$, et par $[Q(h)]$ la partie entière. Alors l'identité

$$A(gX + h) = B(gX + h)\ P(X) + S(X) ,$$

où

$$\begin{cases} P(X) = Q_1(X) + [Q(h)] - \varepsilon , \\ S(X) = (\varepsilon + \{Q(h)\})\ B(gX + h) + R(gX + h) , \end{cases}$$

réalise la division de $A(gX + h)$ par $B(gX + h)$ au sens de (3).

C. Q. F. D.

LEMME 2. - <u>Deux polynômes positifs de même degré sont divisibles.</u>

<u>Démonstration</u>. - Ce lemme n'est qu'un cas particulier du précédent, mais il est plus simple d'en donner une démonstration directe.

Soient $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes positifs à coefficients entiers de même degré. Soit

$$\alpha = \lim_{x\to\infty} A(x)/B(x) \qquad (\alpha > 0 , \alpha \in \mathbb{Q}) .$$

L'identité

$$A(X) = B(X)[\alpha] + (A(X) - B(X)[\alpha])$$

représente la division

$$(Q(X) = [\alpha] , R(X) = A(X) - B(X)[\alpha]) .$$

C. Q. F. D.

Nous pouvons à présent prouver le théorème 1.

Soient $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes positifs à coefficients entiers tels que

$A(X) > B(X)$. Le lemme 1 montre l'existence d'un entier $g_1 \geq 1$ tel que, pour tout $h \in \{0, 1, \dots, g_1 - 1\}$, les deux polynômes $A(g_1 X + h)$ et $B(g_1 X + h)$ soient divisibles.

Soit $R(X)$ le reste (qui dépend de h en général). Si le degré de $R(X)$ est strictement inférieur à celui de $B(X)$, on dit que l'on a clos une étape.

Si $B(X)$ et $R(X)$ ont même degré, le lemme 2 nous indique que $B(X)$ et $R(X)$ sont divisibles. Soit $R_1(X)$ le reste. Si le degré de $R_1(X)$ est strictement inférieur à celui de $R(X)$, l'étape est close. Sinon, $R(X)$ et $R_1(X)$ sont divisibles avec $R_2(X)$ pour le reste. Le processus se poursuit jusqu'au moment où aparaît un reste $R_{j_1}(X)$ de degré strictement inférieur à celui de $R_{j_1-1}(X)$ (donc de $B(X)$). Cette situation se produit nécessairement, car une chaîne du type

$$\begin{cases} B(X) > R(X) > R_1(X) > \dots > R_{j_1}(X) \geqslant 0 \\ \text{degré } (B(X)) = \text{degré}(R_{j_1}(X)) , \end{cases}$$

est finie (les coefficients du terme de plus haut degré étant des entiers décroissants minorés par 0).

Sitôt que $\text{degré}(R_{j_1}) < \text{degré}(R_{j_1-1}(X)$, on déclare l'étape close.

On pose alors $B_1(X) = B(g_1 X + h)$. On détermine un entier $g_2 \geq 1$ tel que $B_1(g_2 X + h_2)$ soit divisible par $R_{j_1}(g_2 X + h_2)$ pour tout $h_2 \in \{0, 1, \dots, g_2 - 1\}$. A la clôture de cette nouvelle étape, on tombe sur un reste $R_{j_2}(X)$ de degré strictement inférieur à celui de $R_{j_1}(X)$. Puis on recommence, et l'on obtient ainsi une suite de polynômes dont les degrés décroissent strictement

$$R_{j_1}(X) , R_{j_2}(X) , \dots , R_{j_s}(X) .$$

La suite est évidemment finie, et au rang s , on tombe sur le polynôme nul.

En résumé, soit $\prod_{k=1}^{s} g_k$, et soit $h \in \{0, 1, \dots, g - 1\}$. La fraction $A(gX + h)/B(gX + h)$ se décompose sous la forme

$$Q_0(X) + \cfrac{1}{Q_1(X) + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{Q_m(X)}}}$$

où m dépend de h et où les $Q_p(X)$ sont des polynômes positifs à coefficients entiers.

Il s'ensuit que si n parcourt les entiers, on a

$$\psi(A(gn + h)/B(gn + h)) = m ,$$

à partir d'un certain rang (l'égalité n'a pas nécessairement lieu pour les petites valeurs de n , car $Q_p(n)$ peut ne pas être un entier positif). Ainsi la suite $\psi(A(n)/B(n))$ est constante (à partir d'un certain rang) sur toute progression arithmétique de pas g .

Cela montre bien que la suite est périodique (de période g) à partir d'un certain rang.

4. Cas des exponentielles.

Considérons la suite $(\psi(2^n/3^n))$. On pourrait s'attendre, au vu des résultats de Dixon et Heilbronn, à ce que

$$\frac{1}{n}\,\psi\left(\frac{2^n}{3^n}\right) \longrightarrow \frac{12}{\pi^2}\log 2 \log 3 = 0{,}9258730 \ldots .$$

Or, d'après les calculs de J. HARDOUIN-DUPARC, on constate que pour $10 \leq n \leq 220$, on a

$$0{,}36 \leq \frac{1}{n}\,\psi\left(\frac{2^n}{3^n}\right) \leq 0{,}80 \text{ , sauf pour } n = 13 , 16 , 21 , 33 .$$

De plus, on a l'impression que cette quantité se stabilise au voisinage de 0,6 (voir tableau ci-dessous).

n	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210
$\frac{100}{n}\,\psi\left(\frac{2^n}{3^n}\right)$	80	57	36	60	59	49	68	62	59	58	56

Il est sans doute très difficile de prouver que $1/n\ \psi((2^n/3^n))$ est "stationnaire" Il semble clair toutefois que $1/n\ \psi(2^n/3^n)$ ne tend pas vers $12/\pi^2 \log 2 \log 3$. Il serait plus raisonnable de se demander si la suite ne tendrait pas plutôt vers $12/\pi^2(\log 2)^2 = 0{,}556 \ldots$

En effet,

$$\frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{\left[\frac{3^n}{2^n}\right] + \frac{\alpha(n)}{2^n}} ,$$

où $\alpha(n) = 2^n\{3^n/2^n\} < 2^n$.

Alors $\psi(2^n/3^n) = 1 + \psi(\alpha(n)/2^n)$ et, en se reportant à nouveau aux résultats de DIXON et HEILBRONN, on pourrait espérer que

$$\frac{1}{n}\,\psi\left(\frac{\alpha(n)}{2^n}\right) \longrightarrow \frac{12}{\pi^2}(\log 2)^2 .$$

Toujours est-il que l'on est loin de pouvoir démontrer des résultats aussi précis. S'il est banal de constater que

$$\psi\left(\frac{2^n}{3^n}\right) = O(n) ,$$

on ne sait pas si

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n}\,\psi\left(\frac{2^n}{3^n}\right) > 0 .$$

Y. POURCHET a toutefois réussi à prouver que, si $(p , q) = 1$, $p \neq 1$, $q \neq 1$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \psi\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = +\infty .$$

Ce résultat a pour corollaire ce qui suit :

Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $\sup_n \psi(x^n) < \infty$. Alors, ou bien x est entier, ou bien $\frac{1}{x}$ est entier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIXON (J. D.). - The number of steps in the euclidean algorithm, J. of Number Theory, t. 2, 1970, p. 414-422.

[2] DIXON (J. D.). - A simple estimate for the number of steps in the euclidean algorithm, Amer. math. Monthly, t. 78, 1971, p. 374-376.

[3] HEILBRONN (H.). - On the average length of a class of finite continued fractions, Abhandlungen Zahlentheorie und Analysis (édité par Turan en souvenir de Landau), p. 87-96. - Berlin, VEB Deutscher Verlag, 1968.

[4] LAMÉ (G.). - Note sur la limite du nombre des divisions dans la recherche du plus grand commun diviseur entre deux entiers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 19, 1844, p. 867-870.

[5] MIKUSINSKI (J.). - Sur certaines fractions continues finies, Ann. Polonici Mathem., t. 1, 1954, p. 203-206.

[6] SCHINZEL (A.). - On some problems of the arithmetical theory of continued fractions, Acta Arithm., Warszawa, t. 6, 1961, p. 394-413.

[7] SCHINZEL (A.). - On some problems of the arithmetical theory of continued fractions, II., Acta Arithm., Warszawa, t. 7, 1962, p. 288-298.

(Texte définitif reçu le 26 avril 1972)

Michel MENDÈS FRANCE
U. E. R. de Mathématiques et Informatique
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX