

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL MENDÈS FRANCE

Fonctions g-additives et les suites à spectre vide

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 10, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A6_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS g -ADDITIVES ET LES SUITES À SPECTRE VIDE

par Michel MENDES FRANCE

Introduction. - Soient

$$n = \overline{\dots e_p e_{p-1} \dots e_1 e_0} \quad \text{et} \quad m = \overline{\dots e'_p e'_{p-1} \dots e'_1 e'_0}$$

deux entiers non négatifs écrits dans le système décimal. On dit que n domine m ($n > m$), si, pour tout $p = 0, 1, \dots$, on a $e_p \geq e'_p$. Ceci définit un ordre partiel sur les entiers (exemple : $4312 > 202$). Soit $q(n)$ le nombre d'entiers $m \geq 0$ qui sont dominés par n .

Soit, d'autre part, $M = (m_n)$ la suite croissante des entiers "quadratfrei". Alors la suite $(\text{Log } q(m_n))$ est équirépartie (mod 1).

L'objet de cet exposé est de montrer comment on atteint ce style de résultat. Cela requiert un certain nombre de préliminaires.

1re partie

Spectre d'une suite

1. Suites à caractère presque-périodique.

Soit $M = (m_n)$ une suite non décroissante d'entiers positifs. On pose

$$\chi(k) = \text{card}\{n \in \mathbb{N} \mid m_n = k\} .$$

On appellera χ la fonction caractéristique de M (si M est strictement croissante, on retrouve la notion habituelle de fonction caractéristique).

Par définition, la suite M est à caractère presque-périodique (c. p.-p.), si χ est une fonction presque-périodique au sens de Bésicovitch, bornée, non nulle. Cela signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\|\chi - \theta\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\chi(k) - \theta(k)| < \varepsilon .$$

Exemple 1. - Soit $\alpha > 0$. La suite $([\alpha n])$ est à c. p.-p. ($[x]$ désigne la partie entière de x).

Exemple 2. - Soit E une partie finie ou infinie de \mathbb{N} , telle que $\sum_{n \in E} \frac{1}{n} < \infty$.

Soit $M(E)$ la suite croissante des entiers qui ne sont divisibles par aucun élément de E . Alors $M(E)$ est à c. p.-p.

En effet, si E est fini, $M(E)$ est à caractère périodique. Si E est infini, $M(E)$ est une "limite" de suites à caractères périodiques. Elle est donc à caractère presque-périodique.

La suite des entiers "quadratfrei" tombe évidemment dans cette classe.

2. Spectre d'une suite.

Soit $\Lambda = (\lambda_n)$ une suite infinie de nombres réels. On appelle spectre de Λ ($\text{sp}(\Lambda)$), l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que la suite $\Lambda + \alpha\mathbb{N} = (\lambda_n + \alpha n)$ ne soit pas équirépartie (mod 1).

On montre sans peine les deux résultats suivants :

THÉORÈME 1. - L'ensemble $\text{sp}(\Lambda)$ est de mesure (de Lebesgue) nulle.

THÉORÈME 2. - "Presque toutes" les suites Λ ont un spectre vide ("presque tous" au sens de la mesure de Haar sur le tore $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$).

Le dernier théorème montre qu'il y a un certain intérêt à considérer des suites à spectre vide. Il est d'ailleurs facile d'en donner une caractérisation :

THÉORÈME 3. - Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Λ est à spectre vide ;
- (ii) Pour toute suite d'entiers non décroissante $M = (m_n)$ à c. p.-p., la suite $\Lambda_M = (\lambda_{m_n})$ est équirépartie (mod 1).

Montrons en effet que (i) implique (ii). On considère la somme de Weyl relative à Λ_M :

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp 2i\pi \ell \lambda_{m_k} \quad (\ell \in \mathbb{Z}^*) .$$

Soit χ la fonction caractéristique de M . On a

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m_n} \chi(k) \exp 2i\pi \ell \lambda_k + o(1) \\ &= \frac{m_n}{n} \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} \chi(k) \exp 2i\pi \ell \lambda_k + o(1) . \end{aligned}$$

Comme par hypothèse M est à c. p.-p., $\frac{m_n}{n}$ tend vers une limite finie A quand $n \rightarrow \infty$. Soit, par ailleurs, θ un polynôme trigonométrique. On a

$$\sigma_n \sim A \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} \theta(k) \exp 2i\pi \ell \lambda_k + A \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} (\chi(k) - \theta(k)) \exp 2i\pi \ell \lambda_k .$$

La première moyenne au second membre tend vers 0, car $\text{sp}(\Lambda) = \emptyset$. Donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n| \leq A \|\chi - \theta\| .$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, un choix convenable de θ permet donc de rendre $\limsup |\sigma_n|$ inférieure à ε . Donc $\sigma_n \rightarrow 0$.

C. Q. F. D.

La réciproque se démontre de façon analogue.

Exercice d'application. - Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, la suite $(\sqrt{2} [\alpha n]^2)$ est équirépartie (mod 1).

2e partie

Fonctions g-additives

1. Définition et caractérisation.

La notion de fonction g -additive est due à GEL'FOND. Soit $g \geq 2$ un entier supposé fixé une fois pour toute. Une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite g -additive, si, pour tous entiers a, k, b tels que $a \geq 0, k \geq 0, 0 \leq b \leq g^a - 1$, on a

$$f(kg^a + b) = f(kg^a) + f(b) .$$

(Ceci implique $f(0) = 0$.) Par exemple, $f(n) = n$ est g -additive. De même, la fonction s qui, à l'entier n fait correspondre la somme des chiffres de n , écrit en base g .

Dans la suite, on adopte la notation suivante :

$$n = \sum_{p=0}^{\infty} e_p(n) g^p ,$$

où les $e_p(n)$ sont des entiers $0 \leq e_p(n) \leq g - 1$, tous nuls pour $p \geq 1 + \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } g} \right]$. On considèrera e_p comme une application de \mathbb{N} sur $G = \{0, 1, \dots, g - 1\}$.

THÉOREME 4. - Une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est g -additive, si, et seulement si, il existe une suite de fonctions réelles $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ définies sur G , nulles

en 0 , telles que

$$f = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p \circ e_p .$$

La démonstration est élémentaire, et repose sur l'identité

$$f\left(\sum_{p=0}^{\infty} e_p(n)g^p\right) = \sum_{p=0}^{\infty} f(e_p(n)g^p)$$

vérifiée par les fonctions g -additives. (En fait, φ_p est définie par $\varphi_p(a) = f(ag^p)$.)

2. Propriétés de moyennes.

On a le résultat suivant :

THÉORÈME 5. - Soit f une fonction g -additive réelle,

$$f = \sum_0^{\infty} \varphi_p \circ e_p .$$

Alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi f(k) \right| = \prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) \right| .$$

Donnons ici une "preuve heuristique" du théorème ! Considérons le groupe compact $G^{\mathbb{N}} \simeq (\mathbb{Z}/g\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ muni de la mesure de Haar normalisée μ . Soit $\varepsilon = (\varepsilon(n)) \in (G^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ une suite équirépartie dans $G^{\mathbb{N}}$. Alors le théorème de Weyl montre que, pour des applications $\phi : G^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}$ convenables, on a

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(\varepsilon(k)) = \int_{G^{\mathbb{N}}} \phi(\eta) d\mu(\eta) .$$

$\varepsilon(k)$ étant un élément de $G^{\mathbb{N}}$, nous préférons écrire $\varepsilon(k) = (\varepsilon_0(k) , \varepsilon_1(k) , \dots)$, et la formule (1) devient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(\varepsilon_0(k) , \varepsilon_1(k) , \dots) = \int_{G^{\mathbb{N}}} \phi(\eta_0 , \eta_1 , \dots) \prod_{p=0}^{\infty} d\nu(\eta_p) ,$$

où ν est la mesure de Haar normalisée sur G . En particulier, si ϕ se factorise,

$$\phi(x_0 , x_1 , \dots) = \prod_{p=0}^{\infty} \phi_p(x_p) ,$$

on obtient

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \prod_{p=0}^{\infty} \varphi_p(\varepsilon_p(k)) = \prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \sum_{a=0}^{g-1} \varphi_p(a) ,$$

$$\text{car } \int_G = \frac{1}{g} \sum_0^{g-1} .$$

Enfin, remarquons que la suite $e = (e(n)) \in (G^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, où

$$e(n) = (e_0(n), e_1(n), \dots, e_p(n), \dots) ,$$

est équirépartie dans $G^{\mathbb{N}}$. Choisissons $\varphi_p(x) = \exp 2i\pi \varphi_p(x)$, on obtient

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp 2i\pi f(k) = \prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) .$$

Cette formule est plus précise que celle qui est énoncée dans le théorème 5, mais en contrepartie, elle n'est valable que si l'on fait des restrictions sur les φ_p de façon à pouvoir appliquer le théorème de Weyl. Une technique entièrement différente permet toutefois d'établir le théorème rigoureusement (voir [7]).

COROLLAIRE. - Soit $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$, et ayant au moins une valeur irrationnelle. Soit f_φ la suite dont le n -ième terme est

$$f_\varphi(n) = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p(e_p(n)) .$$

Alors le spectre de f_φ est vide. En particulier, f_φ est équirépartie (mod 1).

La preuve s'appuie sur le fait que la moyenne de Weyl

$$\limsup \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n \exp 2i\pi \ell(f_\varphi(k) + k\alpha) \right|$$

est égale à

$$\prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \ell(\varphi(a) + a\alpha g^p) \right| ,$$

quantité qui est nulle pour tout α .

Exercices d'application.

(i) Soit $d \in \mathbb{N}$. Soit $s^d(n)$ la somme des puissances d^e des chiffres de l'entier n (si $d = 0$, on pose $0^0 = 0$). Alors la suite $(xs^d(n))$ est équirépartie (mod 1) si, et seulement si, $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

(ii) Soit $q(n)$ le nombre d'entiers m qui sont dominés par n (voir l'introduction). On montre sans peine que

$$q(n) = \prod_{p=0}^{\infty} (1 + e_p(n)) .$$

En déduire que, si $M = (m_n)$ est une suite à c. p.-p., alors la suite $(\text{Log } q(m_n))$ est équirépartie (mod 1) .

BIBLIOGRAPHIE

Sur les fonctions presque-périodiques :

- [1] BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p , Bull. Soc. math. France, Mémoire 5, 1966, 106 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1964).
- [2] KAHANE (J.-P.). - Sur les fonctions presque-périodiques généralisées dont le spectre est vide, Studia Math., Warszawa, t. 21, 1962, p. 231-236.

Sur les fonctions g -additives :

- [3] BESINEAU (J.). - Sur un problème de Gel'fond relatif à la fonction somme des chiffres, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 453-456.
- [4] GEL'FOND (A. O.). - Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, Acta Arithm., Warszawa, t. 13, 1968, p. 259-265.
- [5] MENDES FRANCE (Michel). - Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires, J. Anal. math., Jérusalem, t. 20, 1967, p. 1-56 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).
[Voir, en particulier, le chapitre 3.]
- [6] MENDES FRANCE (Michel). - La réunion des ensembles normaux, J. of Number Theory, t. 2, 1970, p. 345-351.
[Le théorème 5 y est partiellement démontré.]
- [7] MENDES FRANCE (Michel). - Les suites à spectre vide et la répartition (mod 1), J. of Number Theory (à paraître).

(Texte reçu le 25 janvier 1971)

Michel MENDES FRANCE
Faculté des Sciences de Bordeaux
Mathématiques
351 cours de la Libération
33 - TALENCE